



TITLE:

伝送回路網の構成に関する研究(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

渡部, 和

CITATION:

渡部, 和. 伝送回路網の構成に関する研究. 京都大学, 1961, 工学博士

ISSUE DATE:

1961-05-18

URL:

<https://doi.org/10.14989/161925>

RIGHT:

伝送回路網の構成
に関する研究

1960年4月

渡部 和

伝送回路網の構成 に関する研究

1960年4月

日本電気株式会社

社員

渡部 和

DOC
1960
23
電気系

伝送回路網の構成に関する研究

内 容 梗 概

頁
1

第 1 章 総 説

第 1.1 節	回路網構成理論の発達と検討	3
第 1.2 節	本研究の意義とその概要	9
第 1.3 節	主要記号の説明	12

第 2 章 回路網構成における近似理論

第 2.1 節	回路網構成における近似問題の基礎理論	17
2.1.1	一般化特性関数と自乗一次変換	17
2.1.2	理想伝送量関数	20
2.1.3	特性関数及び伝送係数の算出	23
2.1.4	第 2.1 節の結論	32

第 2.2 節	通過域を 1 個有する通過域チェビシェフ特性回路器 の設計理論	34
2.2.1	理想伝送量関数と一般化特性関数の標準形	34
2.2.2	低域通過回路器の場合	37
2.2.3	帯域通過回路器の場合	39
2.2.4	帯域阻止回路器の場合	45
2.2.5	理想伝送量関数に関する留数 γ の決定法について	47
2.2.6	設 計 例	54
2.2.7	第 2.2 節の結論	63

第 2.3 節	通過域を 2 個有する通過域チェビシェフ特性回路器 の設計理論	64
2.3.1	複通過域回路器の理想伝送量関数と一般化特性関数	64
2.3.2	減衰極を 2 個有する複通過域回路器の設計理論	72

2.3.3	減衰極を2個有する複通過域戸波器の設計理論	73
2.3.4	設計例	75
2.3.5	第2.3節の結論	78

第3章 リアクタンス梯子形回路網の構成理論

第3.1節	回路次数と構成素子	80
3.1.1	はしがき	80
3.1.2	線形グラフとそのベクトル空間表示	80
3.1.3	最小線輪数回路	83
3.1.4	リアクタンス回路網の自由度と線輪数	89
3.1.5	第3.1節の結論	95
第3.2節	リアクタンス帯域戸波梯子回路の実現充分条件	96
3.2.1	基礎的必要条件	96
3.2.2	帯域戸波梯子回路の実現充分条件	100
3.2.3	通過域最少反響減衰量 A_e と梯子回路実現性との関係	110
3.2.4	第3.2節の結論	112
第3.3節	最小線輪数帯域戸波梯子回路の構成理論	114
3.3.1	帯域戸波梯子回路が最小線輪(蓄電器)数梯子回路で構成される為の充分条件	114
3.3.2	最小線輪数帯域戸波梯子回路構成法の実際	120
3.3.3	対称減衰特性帯域戸波器の三次インピーダンス展開法	126
3.3.4	設計例	137
3.3.5	第3.3節の結論	159

第4章 回路網位相幾何学に関する研究

第4.1節	回路網位相幾何学における木の算出	162
4.1.1	回路網位相幾何学的理論の検討	162
4.1.2	線形グラフの論理演算法則	166

4.1.3	非分離クラフと電気回路網	170	頁
4.1.4	木の算出法	171	
4.1.5	第 4.1 節の結論	179	
第 4.2 節	木及び多木小行列式の相対符号の決定	180	
4.2.1	方向付けられたクラフのベクトル表示	180	
4.2.2	木小行列式の相対符号	181	
4.2.3	クラフの微分演算	184	
4.2.4	多木の算出とその相対符号	185	
4.2.5	今後の問題の検討	188	
4.2.6	第 4.2 節の結論	192	
	本研究によって得られた主なる成果	193	
謝 辞		195	
参 考 文 献	一 覧	196	

内 容 梗 概

本論文は 筆者が 日本電気株式会社に於て 1954 年後半より現在まで行つて来た 濾波器設計理論を中心とする 伝送回路網構成の理論的並びに実用化研究をまとめたものである。

第 1 章は 濾波器設計理論に関係深い回路網理論の従来の研究を展望し、理論的並びに実際の立場から検討を加え本研究の意義を明らかにしている。更に本論文で主として使用される記号と主要な概念について述べてある。

第 2 章は 回路網構成の理論に於ける近似問題を統一した理論体系によって解いているものである。第 2.1 節はその基礎理論であつて 第 1 種或は第 3 種 Abel 積分で表わされる理想伝送量関数を定義し、その変換によって 実現可能な伝送量関数を求める。これによって従来研究されて来た設計理論を統括する事が出来、今迄知られていなかった新しい 有益な設計理論を導くことができたのである。第 2.2 節に於ては その 1 つの重要な適用例として通過域を只 1 個有する濾波器の設計理論が述べてあり、第 2.3 節は 通過域を 2 個有する濾波器の設計理論が夫々詳細に述べてある。更にこれらの理論の実用化の例として、二三の新しい形の濾波回路網の設計の實際が述べてある。

第 3 章は 帯域濾波回路の構成理論の研究を述べ、従来未解決だった リアクタンス帯域濾波回路が 結合線輪を用いずに実現出来るための条件を導びいている。第 3.1 節に於ては集中受動線形回路網の自由度と構成素子との基礎的考察を述べ、特にリアクタンス回路網に於ける最小線輪数回路の基本的定理を導びいている。第 3.2 節に於てリアクタンス帯域濾波回路網の実現条件を詳細に検討し、第 3.3 節に於ては帯域濾波梯子回路が最小線輪数回路で構成されるための充分条件を述べている。又、それらの構成理論を実際面に応用するのに必要な公式及び定理を詳細に記述した。更にこの章の研究によって実用化された設計例を述べている。

第 4 章は 回路網の構成設計理論を 回路網位相幾何学の立場から研究したもの

のである。第4.1節に於ては回路網トポロジイの最も重大な研究課題となっている木 (tree) の算出法について 有効な方法を提案し 実際に電子計算機に適用して有効性を明かにしている。第4.2節は、第4.1節の理論を基礎として木小行列式及び多木小行列式の相対符号の決定法及びそれらの応用として今後研究すべき途を論じている。

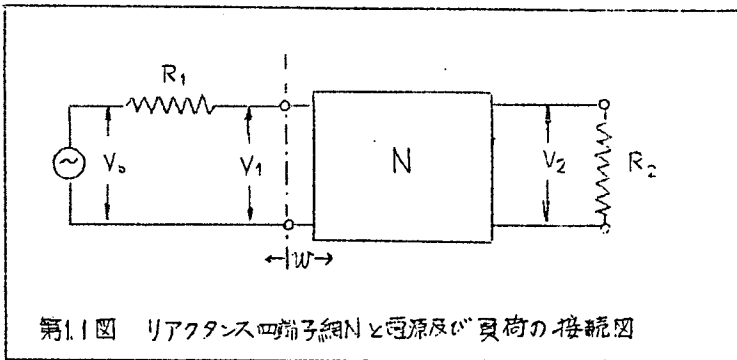
第 1 章

総 説

第1.1節 回路網構成理論の発達と検討

回路網構成論は 1915 年前後濾波器が発明されてからその歴史が始まったが、工業的に実用化される様になったのは 1923 年 O.J. Zobel による「影像パラメーター理論」が発表されてからである。この設計理論を基礎として多くの影像パラメーター濾波器設計法が研究されたが、この方法では回路構成に多くの整合条件を付けられているため減衰量特性に制限をうけ且伝送特性に或程度のあいまいさが残り遮断特性の厳しいものは設計困難であった。

一方 1940 年前後に至り S. Darlington⁽¹⁾, W. Cauer⁽²⁾ H. Piloty⁽³⁾ 等により 四端子回路網の動作特性そのものを濾波器特性に近似させて、これを回路構成する所謂「動作パラメーター理論」が展開された。Darlington で代表されるこれらの研究は濾波器設計理論 従って四端子回路網の構成理論の分野に於て輝かしい成果である。今日では 古典となっているその理論の要点は次の如くである。



第 1.1 図に示す様に内部抵抗 R_1 起電力 V_0 の電源と負荷抵抗 R_2 との間にリアクタンス四端子網 N を挿入したとき 次のパラメーターを定義する。

$$\text{動作伝達係数} \quad S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{V_0}{V_2} \quad (1.1)$$

$$\text{反響伝達係数} \quad T = \frac{R_1 + W}{R_1 - W} \quad (1.2)$$

明かに $|S|^2$ は 電源からとり出し得る最大電力 P_0 と実際に負荷側で消費される電力 P_2 との比であり $|T|^2$ は 電源へ戻されたと考えられる反響電力 P_r と

の比である。四端子網 N がリアクタンス回路であって 内部の電力消費がないものとするれば次式が成立する。

$$P_o = P_2 + P_r$$

即ち

$$\frac{P_o}{P_2} = 1 + \frac{P_r}{P_2}$$

従って

$$|S|^2 = 1 + \left| \frac{S}{T} \right|^2 \quad (1.3)$$

又は

$$\left(10^{\frac{A}{10}} - 1 \right) = \left(10^{\frac{A_e}{10}} - 1 \right)^{-1} \quad (1.3')$$

但し

$$\begin{cases} A = 10 \log_{10} \frac{P_o}{P_2} \\ A_e = 10 \log_{10} \frac{P_o}{P_r} \end{cases}$$

上式はリアクタンス四端子網に於ける基本関係式であり、これによって S と T は互に独立ではあり得ない。今

$$\text{特性関数} \quad \varphi = \frac{S}{T} \quad (1.4)$$

とすれば リアクタンス四端子網の基本関係式 (1.3) は

$$|S|^2 = 1 + |\varphi|^2 \quad (1.5)$$

と表わされる。 S 或は φ が定まれば リアクタンス四端子網の Z -行列、或は Y -行列 或は縦続マトリックスが求められる。ここで問題が2つに別れる。その第1は S 或は φ を与えられた特性に 如何にして近似させるかという「近似問題」であり その第2は「実現問題」即ち S 或は φ から求めた回路パラメーターによって 如何にして実際の回路構成を実現するかという問題である。前者即ち「近似問題」については Darlington は 動作減衰量が通過域内でチェビシェフ特性(偏差の最大値が相等しい伝送特性)を示すと同時に阻止域に於ても最小の減衰量が相等しくなる様な 低域濾波器の φ を示めた。これは連立チェビシェフ特性濾波器理論として知られるもので、 φ は 楕円関数 sn を媒介として

複素角周波数 λ に対して次の様に表わされる。

$$\varphi = \begin{cases} H \cdot L \operatorname{sn} \left(\frac{K_L}{K} w, L^2 \right) & \cdots \cdots \varphi : \text{奇数次} \\ H \cdot L \operatorname{sn} \left(\frac{K_L}{K} w + K_L, L^2 \right) & \cdots \cdots \varphi : \text{偶数次} \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\lambda = j \sqrt{k} \operatorname{sn} \left(\frac{w}{N}, k \right) \quad \cdots \cdots N : \text{次数} \quad (1.7)$$

但し $\begin{cases} k : \text{低域濾波器の帯域係数即ち通過域及び阻止域遮断周波数の比} \\ L : \text{阻止減衰量 } k \text{ 及び } N \text{ によって定まる定数} \\ H : \text{通過域偏差の大きさによって定まる正定数} \\ K, K_L : \text{母数 } L^2, \sqrt{1-L^4} \text{ に関する完全楕円積分} \\ N : \text{実現しようとする回路の次数} \end{cases}$

φ は上式を基として $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}$ の性質から λ の有理関数として求められた。

Darlington は φ から S を求めるのに 基本関係式(1.5) 即ち、高次代数方程式を解く手段にはり計算する事をしないで $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}$ の性質から直接 S を λ の有理関数として求める公式を与えたのである。

Darlington は更に同じ論文⁽¹⁾で 阻止域の特性が 映像パラメーター濾波器設計法に於て現われる 定 K 形 誘導 m 形濾波器の映像減衰量と同一であって通過域が チェビシエフ特性となっている “通過域チェビシエフ形低域濾波器” の特性関数を求める公式も与えた。 φ から S を求めるには この場合は基本関係式から高次代数方程式を解いて求められる。

Darlington 等によって始められた動作パラメーター理論は我国に於いても大いに研究されたが、⁽⁸⁾⁽⁹⁾⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾ 実際に搬送装置の設計に全面的に取り入れられたのは 内外共に ようやく戦後の事である。理論的に美しい体系をなしていた Darlington の近似理論を実際に適用してみると最大の矛盾は、彼の理論が低域濾波器の特性近似理論である事であった。低域濾波器が実現出来れば 同波数変換により高域濾波器は容易に得られるが、帯域濾波器は所謂 リアクタンس変換によって 通過中心周波数に対して高い側と低い側の伝送特性が 対数周波数目盛に対して対称となっている 対称減衰特性型帯域通過(阻止)濾波器しか得られない。実際に 搬送機器の設計に於ては 単側帯域搬送通信が主であつて 不要側帯域を抑圧し、雑音を抑圧する目的のため濾波器が使用されるのであ

って、殆んど帯域濾波器が必要とされ、しかも減衰特性が高域側と低域側が対称ではないのである。この様な濾波器に対する近似理論の出現が実用化によって始めて望まれる様になって来た。B. J. Bennett (14) は逐次近似法によって楕円関数を用いずに連立チエビシエフ特性濾波器を得、K.H. Hasse は帯域濾波器にその方法を拡張せんとした。これを分布定数濾波器に拡張した池野 (15) の理論がある、しかしこれらは逐次近似法で本質的に面倒であり実用化は全く困難であった。

一方通過域に於て完全なチエビシエフ近似特性となる事を望まず直交関数展開による最小自乗近似法を適用した近似理論が 1952 年 S. Darlington によって提唱された。(4) この方法によれば近似しようとする周波数領域を適当な写像変換によって Z 平面の単位円周上に変換するのである。例えば p 平面の $(-j\omega_c + j\omega_c)$ の領域は

$$p = \frac{\omega_c}{2} \left(Z - \frac{1}{Z} \right) \quad (1.6)$$

によって Z 平面の単位円周上に写像される。Z 平面上での Z の巾 即ち $1, Z, Z^2, Z^3, \dots, Z^n, \dots$ は単位円周上では直交関数であり、与えられた特性を変換 (1.6) で Z 平面に変換し Z の無限級数展開を有限項で打ち切り再び p 平面に逆変換すれば通過域において直交関数族 (実はチエビシエフ多項式族) による最小自乗近似が得られるというのがその要旨である。この方法は濾波器の様に通過域が水平 (平坦) 特性であるものだけでなく与えられた関数形にも最小自乗の意味で近似を得る事が出来る画期的な理論であるが、濾波器設計に於ける様に通過域のみならず阻止域における減衰特性が極めて重要であり、又特に立上り特性が急峻なものを要求されるとこの方法の本質的欠陥である通過帯域の端における偏差が大きくなり、濾波器の伝送特性を著しく害する事になる。直交関数展開による方法はこの外にもあるが、いづれも帯域の端における誤差 (所謂 Gibbs の現象) が高級な設計程目立ち大きい欠点となる。以上は著者の研究以前までの近似理論の発展である。著者は通過域がチエビシエフ近似特性となる非対称減衰特性帯域濾波器、阻止域の一部もチエビシエフ近似をなす非対称連立チエビシエフ帯域濾波器その他種々の濾波器の近似を一切特別な場合として含む基礎的な濾波器設計のための近似理論を 1955 年以来研究発表して来た。(38)(40)(42)(43)(44)(57) (次節参照) 著者の研究後若干のこの方面の発表があったが、(17)(18) 著者の方法の特別な場合であるか、又計算が極めて面倒

の上得られた結果に実用性が少いものであり、著者の方法で濾波器設計における近似理論は殆んど解決されたと思われる。

次に回路網のパラメーターが与えられたとき 実際の回路を実現する実現問題の発達をみよう。これが理論的に取扱われ始めたのは O. Brune の 1931 年の論文⁽¹⁰⁾ からであり、S. Darlington⁽¹¹⁾ は O. Brune を基礎として リアクタンス四端子網の構成法を導いたが、構成素子に負のものが出現するか否かについては言及しなかった。只有限周波数に減衰極のない 無極濾波器は必ず正素子で実現出来る事を述べているだけである。如何に近似法が巧みに達成せられても負素子を含む回路構成によっては実用上の価値は零である。負素子を生じない様な回路を得る事は設計者の経験と勘にたよっていたのである。この問題には甚安の研究もあったが 解決に深く立ち至ったのは藤沢⁽¹¹⁾⁽¹²⁾ の研究であった。藤沢によって 低域濾波器の場合について負素子を有しないための必要且充分条件が得られ 又その構成法も示された。しかし 既に述べた様に 実際に設計者が遭遇する問題の殆んどは帯域濾波器であり、著者の研究に基づく 非対称減衰特性帯域通過濾波器の構成にあたっては その条件、構成法共に全く知られていなかった。そこでこの様な濾波器の場合の構成法を導き 負素子が現われなかったための充分条件を得、非対称帯域濾波器実現にたい見返しを与える事に成功したのである。更に 回路構成の小型化、低廉化のために線路の個数が最小で実現出来るための条件及びその構成法を導き、先に述べた近似法と一体となった理論体系の下に数多くの濾波器を設計製作し希望通りの特性を得ているのである。

一方回路構成が複雑となり、又要求される特性も極めて厳重となって来れば最大の困難性は数値計算特にその計算桁数にある事が判明して来た。この事は今日の様に理論が略完成しその設計例が無数に現われて来て始めて明かになって来た事である。この解決には 電子計算機の高性能なものを使用する事と 理論そのものを検討し 桁数を必要としない様な方法を探さねばならない。この問題は新しい問題であって 諸外国に於ける回路網設計者の共通の悩みと言える。著者はこの点を早くから察し 先ず 回路網理論の実用化のためにふさわしい電子計算機の設計研究に力を注いだ。回路網理論実用化のためにふさわしい計算機として次の条件を充すものを設計製作したのである。

- (1) 浮動小数点演算が可能であり、有効桁数が(倍長で) 10 進法、23 桁以上
- (2) 数値計算(浮動、固定)のために便利な命令を出来る限り多く有する事、
- (3) 論理演算が可能である事。

(4) 繰返し計算のための B-box を有する $1 - \frac{1}{2}$ 番地方式である事。

又この様な計算機を駆使して今まで述べて来た理論を数値計算にうつす外に更に計算機にふさわしい、又計算に多くの桁数を必要としない理論を求めて回路網位相幾何学の研究に達した。回路網位相幾何学又は回路網トポロジイは遠く 1847 年 G. Kirchhoff の有名な論文⁽²⁹⁾に端を発している。以来今日まで多くの研究者によって研究されて来た。(19)(20)(21)(22)(23)(24)(25) そして現在では電子計算機と結びついて盛に研究されている。(25)(30)(31)(32)(33) しかし現在のところ未だ実用化の域には達していない。その最大の困難さはグラフのうちから可能なすべての木 (tree) を求める方法に有効なものが見出されないからである。著者は計算機を用いて特にその演算能力を利用して無駄なく有効に木を求める方法を見出し若干の実験も試みた。本格的な実験は専用の計算機の完成をまつて行う予定であるが、非常に有望な方法である事が実験的に確かめられている。

以上本研究に関係のある分野の今日までの発達をふり返って本研究の地位を明かにした次第である。

第1.2節 本研究の意義とその概要

本研究は三つの部分に大別される。

第1 ; 近似理論に関する研究

第2 ; 実現理論に関する研究

第3 ; 回路網位相幾何学に関する研究

第1及び第2の研究は 回路網構成理論として統一され、第3の研究はむしろ回路網解析理論に関係が深いが構成論にも関係する基礎理論である。

既に前節で述べた様に 実用上重要な帯域通過(阻止)濾波器を含みその他の種々の用途に適する統一的な濾波器特性の近似理論は S. Darlington の理論が普及し始めた1950年になってようやく 実用面から要望されて来た。第2章に於て述べられている理論は この様な要望によって生れたものである。

第2章に於ては 回路網構成理論に於ける近似問題を統一的理論体系によって解いたものであり、従来知られた設計法をすべて含むと共に 各種の新しい濾波器のための近似法が与えられているのである。即ち およそ濾波器にとって最も理想的である如き 伝送特性をもつ関数を定義して「理想伝送量関数」とした。

理想伝送量関数を $w(\lambda)$ とすれば、(λ は基準化複素角周波数) 定義から $w(\lambda)$ は λ 平面に代数的特異点のみを有する微分(これをアベル微分という) $\psi(\lambda) \cdot d\lambda$ の積分(これをアベル積分という)

$$w(\alpha) = \int_{\Gamma} \psi(\lambda) \cdot d\lambda \quad (1.7)$$

によって与えられる事が導かれるのである。しかも $w(\lambda)$ が特異点を有すれば対数的特異点でなければならないから、 $w(\lambda)$ は 第1種或は第3種アベル積分である。

一方実現可能な特性関数 ϕ から $\phi(\lambda) = \sqrt{\varphi(\lambda)\varphi(-\lambda)}$ なる代数関数 $\phi(\lambda)$ を導き $\phi(\lambda)$ を一般化特性関数と名付けるとき、 $w(\lambda)$ が第1種アベル積分(無極)ならば

$$\phi = j H \ln(w, L) \quad (1.8)$$

とし、又 w が第3種アベル積分ならば

$$\phi = H \cdot \cosh w \quad (1.9)$$

とすることによって、 w から代数関数 ϕ が求まる事が証明された。

w としては濾波器として考えられるあらゆる特性が許されるから、如何なる濾波器も全てこの理論で統一的に設計出来るのである。

第2章に於ては各論として、実用上有意義な通過域を1個有する濾波器、及び通過域を2個有する濾波器の近似理論について詳細に述べてある。又阻止域もチェビシエフ近似をなす濾波器も勿論この理論から得られるのであるが、実際に必要な濾波器は、抑圧すべき雑音のスペクトラム分布に応じた阻止特性が必要であって、平坦な阻止特性を得る事は労多くして実益がないので特に各論としては述べていない。実際にも殆んど設計する事はない。

さて第2章で述べた理論によって種々の新しい濾波器が得られるが、最も重要なものは非対称減衰特性帯域濾波器である。

第3章に於ては今まで明かでなかった一般の帯域濾波器の構成条件とその方法を与え、濾波器設計に広い見通しを与えたものである。先づ回路網の自由度と構成素子の関係を考察し、現在の通信工業に於て大いに問題となっている小型化のための基礎を与えている。

次にリアクタンス帯域濾波器が負素子を生ずる事なく実現出来るための十分条件を求め、最も負素子の生じない様な構成法を導いた。

第3章に於いては更に最小線輪数回路網の実現十分条件と、その構成法に関する研究及びその実際の計算法の研究が述べてある。即ち一般に線輪はコンデンサーに比し著しく高価であり、 Q が低く、形状に本質的に制限があり、小型化のためにも、装置の安定度、性能、価格、等の点からも出来る限り数が少ない事が切に望まれる。そこで最小線輪数回路網構成理論は今日の重要な課題であったが、筆者の第3章に述べた研究により始めて解明された。

実際に設計される濾波器は全て最小線輪数回路なので、これらの理論から導かれる数値計算のための実用化研究も進められ、第3章の特に第3.3節後半の諸公式によって多数の設計が遂行されている。又特にこの理論の特別な場合として対称減衰特性帯域濾波器の最小線輪数回路構成が得られ三次インピーダンス展開法と名付ける計算体系が得られた。これによって単純な計算手続によって速かに回路構成が得られ、通信技術に大きい貢献をもたらす事が出来た。この計算法は現在では電子計算機にプログラムされ機械的に計算する事が出来る様に

なっている。

前節でも述べる様に 回路網設計の分野における今後の大きな課題は 実に数値計算にあると言える。これを解決する1つの途として理論そのものを反省する時が来つつある。

第4章に於てはその希望を託する理論として回路網位相幾何学的理論を電子計算機使用の立場から研究している。そしてこの分野で大きな問題となっている

「如何にして可能な全ての木を求めるか」と言う課題に1つの解答を与えているのである。この研究は電子計算機の使用を前提としているので完全に実用化されてはいないが、実際に電子計算機による実験も行つて有効性が確かめられている。

この研究によれば、可能な全ての木を求めるのに1個の木から出発して 次々と重複する事なく新しい木を求める事が出来、従来の如何なる方法に比しても無駄が少い事が^き大い利点である。完全に無駄な操作なしに全ての木を求める事は出来ないが、その効率は目下のところ他に比するものがないのである。

以上 本研究の意義を述べ、且その概要を説明した。

記 号	意 味 及 び 定 義
ω	基準帯域濾波器の基準角周波数 $\omega = \frac{f}{f_p}$
ω_1, ω_{-1}	基準帯域濾波器の上部及下部基本点基準角周波数
W	帯域濾波器の帯域幅 (サイクル)
	$W = \begin{cases} f_1 - f_{-1} & \cdots \cdots \text{連立 Tchebycheff 特性濾波器の場合} \\ f_p - f_{-p} & \cdots \cdots \text{通過域 Tchebycheff 特性濾波器の場合} \end{cases}$
p	基準帯域濾波器の基準複素角周波数 $p = \gamma + j\omega$ <div style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px; margin-left: 20px;"> <p>一般に入平面は虚軸上 $[-j, +j]$ が通過 (使用) 帯域である様な基準低域濾波器を意味し, p 平面は, 虚軸上 1 対以上の通過 (使用) 帯域を有する基準帯域濾波器を意味するものとする. 変換の場合には, λ-平面が原平面, p-平面が変換後の新平面としている.</p> </div>
$S(\lambda), S(p)$	動作伝達係数或は反伝達関数 $S(\lambda) = CH \frac{g(\lambda)}{f(\lambda)}$
$\varphi(\lambda), \varphi(p)$	特性関数 $\varphi(\lambda) = H \frac{h(\lambda)}{f(\lambda)}$ $S(\lambda) \cdot S(-\lambda) = 1 + \varphi(\lambda) \varphi(-\lambda)$
χ	ω^2 或は Ω^2 即ち $\chi = -\lambda^2$ 或は $\chi = -p^2$
$G(\chi)$	$= \{g(\lambda)g(-\lambda)\}_{\lambda^2=-\chi}$ 或は $\{g(p) \cdot g(-p)\}_{p^2=-\chi}$
$H(\chi)$	$= \{h(\lambda) \cdot h(-\lambda)\}_{\lambda^2=-\chi}$ 或は $\{h(p) \cdot h(-p)\}_{p^2=-\chi}$
$F(\chi)$	$= \{f(\lambda)\}_{\lambda^2=-\chi}$ 或は $\{f(p)\}_{p^2=-\chi}$
N	$S(\lambda), \varphi(\lambda)$ の次数, 即ち回路の次数 $\left\{ \begin{array}{l} N = 2p + 1 \quad \text{或は} \quad p = \frac{N-1}{2} \\ p \text{ は 区間数 と 呼 ば れ て い る も の で あ る} \end{array} \right\}$
M	$S(\lambda), \varphi(\lambda)$ の分母の多項式 $f(\lambda)$ の次数 ($M \leq N$)
m	有限周波数領域に存在する減衰極対の個数
n_0	原点に存在する減衰極の数
n_∞	無限大周波数に存在する減衰極の数 $\left\{ \begin{array}{l} m + n_0 + n_\infty = N \\ m + n_0 = M \end{array} \right\}$
Q_v	基準低域濾波器の減衰極即ち $S(\lambda)$ の極

記号	意味及び定義
P_p	基準低域濾波器の減衰零点即ち $S(\lambda)$ の零点
g_p	基準帯域濾波器の減衰極即ち $S(p)$ の極
p_p	“ の減衰零点即ち $S(p)$ の零点
$Q(\omega)$	“ Q 関数 ” $\begin{cases} Q(\omega) = \sqrt{\left \frac{\omega^2 - 1}{\omega^2 - R^2} \right } & \text{----- 基準帯域濾波器の場合} \\ Q(\Omega) = \sqrt{\left \frac{\Omega^2 - 1}{\Omega} \right } & \text{----- 基準低域濾波器の場合} \end{cases}$
m_p	m パラメータ、(誘導 m パラメータとも言われる) $m_p = \begin{cases} Q(g_p) & \text{---- 基準低域濾波器の場合} \\ Q(g_p) & \text{---- 基準帯域濾波器の場合} \end{cases}$
l	基準低域及び帯域濾波器のインダクタンス
c	“ “ のキャパシテイ
r	“ “ の抵抗
L	実際の回路のインダクタンス $L = \frac{R_0}{2\pi f_c} \cdot l$ 或は $\frac{R_0}{2\pi f_p} \cdot l$
C	実際の回路のキャパシテイ $C = \frac{1}{2\pi f_c R_0} \cdot c$ 或は $\frac{1}{2\pi f_p R_0} \cdot c$
R	実際の回路の抵抗 $R = R_0 \cdot r$ 但し R_0 は規準抵抗値 $\left\{ \begin{array}{l} \text{基準(低域, 帯域)濾波器とは電源側或は負荷の抵抗値 } R_0 \text{ を} \\ \text{規準とし, 且周波数を } f_c, f_p \text{ を規準として表わした濾波器を} \\ \text{言う.} \end{array} \right\}$
L	四端子回路網の縦続マトリックス (Chain Matrix) 又は回路マトリックス, 基本マトリックスとも言う。 <u>基準低域濾波器の場合</u> $L = \frac{H}{f(\lambda)} \begin{bmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{bmatrix}$

記号	意味及び定義
	基準帯域濾波器の場合
	$L = \frac{H}{f(p)} \begin{bmatrix} a(p) & b(p) \\ c(p) & d(p) \end{bmatrix}$
G	多項式の偶関数部分
O	多項式の奇関数部分
Re	関数の実部
Im	関数の虚部
Ra	関数の有理関数部分
Irr	関数の無理関数部分
W	濾波器の入力インピーダンス
W(λ)	理想伝送量関数
S	$S(p)S(-p)$: p^2 の有理関数
Ψ	$\Psi(p) \cdot \Psi(-p)$: p^2 の有理関数
ϕ	$= \sqrt{\Psi}$ - 級化特性関数 (p の代数関数)
G	グラフのベクトル表示
T	木 (tree) のベクトル表示
R	節点 (vertex) のベクトル表示

16 項欠

第 2 章

回路網構成における近似理論

本章に於ては 回路網特に濾波回路の構成における 近似問題に対する新しい統一理論体系が述べられている。本章の理論は従来知られて来た近似問題を全て含むと共に新しい分野の近似理論をも導くものでこれによって濾波器の近似問題は完成したものと言えよう。

本章は第 2.1 節に一般論を述べ、次に第 2.2 節に於て実用上重要なものとして、通過域を 1 個有する全ての濾波器の設計理論を詳細に述べた。その主なる例は非対称減衰特性帯域通過及び阻止濾波器の設計、実軸上に零点を有する最小線輪流回路のための帯域通過濾波器の設計等である。

又 第 2.3 節は通過域が 2 個ある複通過域濾波器の設計についての理論が述べられている。

第 2.1 節 回路網構成における 近似問題の基礎理論⁽³⁸⁾⁽⁴⁰⁾⁽⁴⁴⁾⁽⁵⁷⁾

2.1.1 一般化特性関数と自乗一次変換⁽⁴⁰⁾⁽⁵⁷⁾

既に述べた様にリアクタンス四端子網においては、基本関係式

$$\Xi(p^2) = 1 + \Psi(p^2) \quad (2.1.1)$$

が成立する。但し

$$\begin{cases} \Xi(p^2) = S(p) \cdot S(-p) \\ \Psi(p^2) = \mathcal{G}(p) \cdot \mathcal{G}(-p) \end{cases}$$

この基本関係式は定常的エネルギー流れの関係式から p の虚軸上で成立し且全領域に解析接続されたものであった。さて $\Xi(p^2)$ が物理的実現可能であるためには

1) $\Psi(p^2)$ は p^2 の実有理関数であること。

2) $\Psi(p^2)$ は p 平面の虚軸上で非負値であること。

が必要である。従って $\Psi(p^2)$ 及び $\Xi(p^2)$ は p 平面の実軸と虚軸に対して共

に対称であり $1/4$ 象限内の $\Psi(p^2)$, $\mathcal{Z}(p^2)$ の値によって全平面の値が定まるのである。

さて各種の回路網の特性を統一的に論じ、且設計に必要な数値計算の便のため複素角周波数平面 p 面を他の適当な複素平面 λ 面に写像しよう。新しい入面上において基本関係式 (2.1.1) は

$$\mathcal{Z}^*(\lambda^2) = 1 + \Psi^*(\lambda^2) \quad (2.1.2)$$

と表わされる。 $\mathcal{Z}^*(\lambda^2)$ は必ずしも物理的実現可能である必要はないが、 $\mathcal{Z}(p^2)$ より複雑な関数形であってはならない。

今 $\Psi^*(\lambda^2)$ は $\Psi(p^2)$ と同一次数の λ^2 の実有理関数であるものとするれば、 p 面と λ 面の写像は一般に p 面の $1/4$ 象限が λ 面の $1/4$ 象限に 1 対 1 に対応するものでなければならない。この様な変換は p^2 と λ^2 の一次変換以外にあり得ない。1 次変換に於ては 任意の 4 点の非調和比が不変に保たれることから

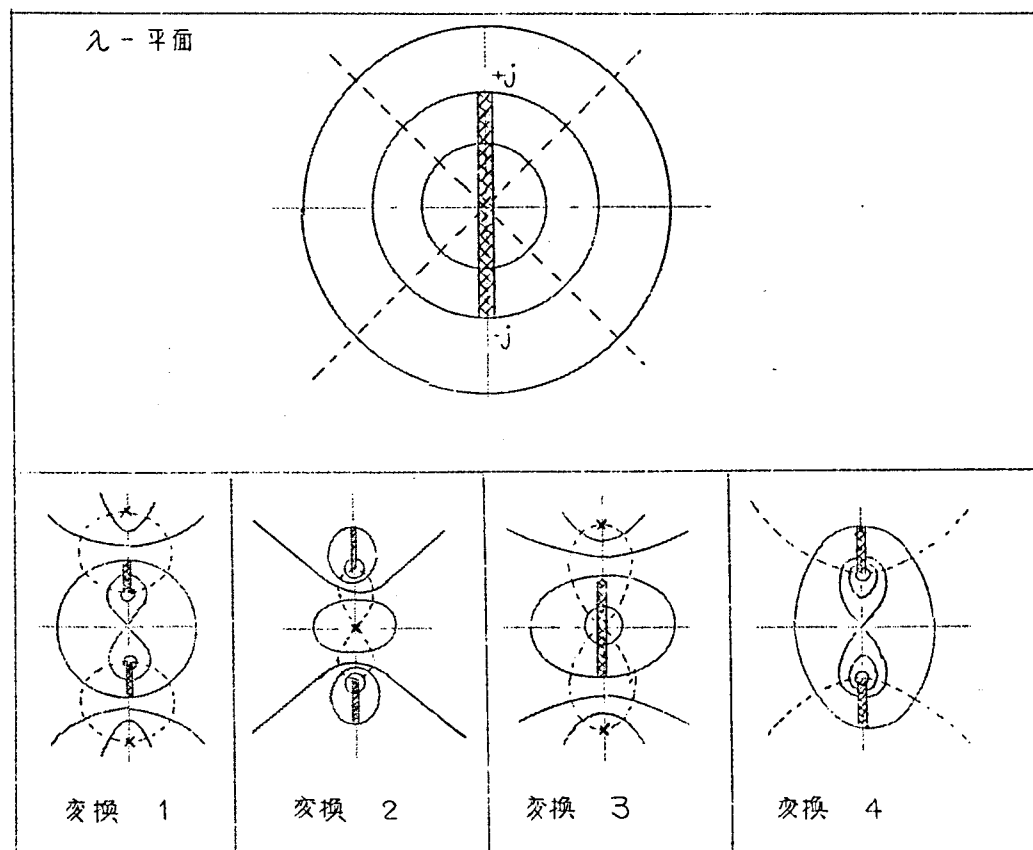
$$\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \frac{p^2 - \alpha_2}{p^2 - \alpha_0} = \frac{\beta_1 - \beta_0}{\beta_1 - \beta_2} \cdot \frac{\lambda^2 - \beta_2}{\lambda^2 - \beta_0} \quad (2.1.3)$$

が成立する。 λ 面と p 面との間には 3 組の対応点が任意に選び得る。 λ 面を基準面と名付け、それに対し 実際の特性を表わす p 面を実現面と名付けることにする。又 (2.1.3) の変換を自乗一次変換と名付ける。実現面においては各種の濾波回路網は特性に応じて低域、高域、帯域通過形 (或は阻止形) 等の如く分類されているが、自乗一次変換 (2.1.3) 式により 基準面に変換してその通過域の数を減少させることが出来るのである。例えば後述の如く帯域濾波器は p 面では明かに 2 個の通過領域を有しているが λ 面において只 1 個の通過域を有する様に変換出来るのである。このとき帯域、低域の区別は λ 面では存在し得ないのであり、理論的取扱いに対しては単通過 (阻止) 形、複通過 (阻止) 形、或は一級に n 通過 (阻止) 形等の如く 基準面における最小の通過域の数によって分類するのが本質的となる。本章に於てはこの見地に於て理論をすすめる第 2.1 節において述べた基礎理論を第 2.2 節及び第 2.3 節に於て単通過形及び複通過形濾波器に適用して設計理論を述べる。

自乗一次変換によって λ 面と p 面がどの様に対応するかを示す例を第 2.1 表に示す。変換の定数 k_2, k' は後章に於て必要となって来るものである。

第 2.1 表

型	1		2		3		4	
	α	β	α	β	α	β	α	β
0	$-k'^2$	0	$-k'^2$	0	0	0	$-k'^2$	0
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	$-k_2^{-2}$	∞	0	∞	$-k_2^{-2}$	∞	∞	∞
λ^2	$\frac{1-k_2^2}{1-k'^2} \cdot \frac{p^2+k'^2}{k_2^2 p^2+1}$		$\frac{-1}{1-k'^2} \cdot \frac{p^2+k'^2}{p^2}$		$(1-k_2^2) \frac{p^2}{k_2^2 p^2+1}$		$\frac{p^2+k'^2}{1-k'^2}$	
p^2	$\frac{(1-k_2^2)k'^2+(k'^2-1)\lambda^2}{\lambda^2(1-k'^2)k_2^2-(1-k_2^2)}$		$\frac{-k'^2}{(1-k'^2)\lambda^2+1}$		$\frac{\lambda^2}{(1-k_2^2)-k_2^2 \lambda^2}$		$\lambda^2(1-k'^2)-k'^2$	



第 2.1 表 自乗 1 次変換の対応図

さて λ^2 の実有理関数 $\Psi^*(\lambda^2)$ は p 平面における特性関数 $\varphi(p)$ から導かれる関数 $\Psi(\lambda^2) = \varphi(p) \cdot \varphi(-p)$ に対応している。従って $\Psi^*(\lambda^2)$ に於ても基準面における特性関数とも言うべき関数 $\varphi^*(\lambda)$ が存在し $\Psi^*(\lambda^2) = \varphi^*(\lambda) \cdot \varphi^*(-\lambda)$ が成立する。然し $\varphi^*(\lambda)$ は必しも λ^2 の実有理関数ではなく、 $\varphi^*(\lambda)$ を直接に自乗一次変換によって p 面の特性関数 $\varphi(p)$ に変換する事は不可能であり、必ず $\Psi^*(\lambda^2)$ を $\Psi(p^2)$ に変換し然る後 $\varphi(p)$ を求めねばならない。その変換計算を容易にし理論を統一するため特性関数の概念を拡張しよう。今 λ^2 (或は p^2) の実有理数 $\Psi^*(\lambda^2)$ (或いは $\Psi(p^2)$) に対して

$$\phi(\lambda) = \sqrt{\Psi^*(\lambda^2)} \quad \text{或は} \quad \phi(p) = \sqrt{\Psi(p^2)} \quad (2.1.4)$$

を充す λ^2 (或は p^2) の代数関数 $\phi(\lambda)$ (或は $\phi(p)$) を一般化特性関数とよぶ事にする。 $\phi(\lambda)$ (或は $\phi(p)$) は基準面の虚軸に対して対称な位置に存在する分岐度 2 の分岐点を含み有限個の 1 位の極を有する。 $\phi(\lambda)$ の右或は左半面の分岐点を 1 位の極と置換え且左或は右半面に対応して存在する分岐点を除けば $\varphi^*(\lambda)$ が得られるのである。

実際の泸波器設計において重要な近似問題は p 面上に与えられた特性に対して伝送量を最良近似とする事であった。本節の所論によればこの泸波器の近似問題は λ 面上での最良近似問題となる。又泸波回路網の伝送特性はその定常状態のみが問題となるので、伝送特性の近似領域は p 面では虚軸上にのみ存在するが、 λ 面においては虚軸及び実軸の両方にわたっている。本章においては主として基準面 λ 面を考察し、その虚軸上及び実軸上に与えられたいくつかの領域上における伝送特性の水平値に対する最良近似を求めよう。

2.1.2 理想伝送量関数⁽³⁸⁾

泸波回路網の動作減衰量を $\bar{u}(p)$ (ネーパーで表わす) とし、動作位相量を $\bar{v}(p)$ (ラジアンで表わす) とすれば、関数

$$\bar{w}(p) = \bar{u}(p) + j \bar{v}(p) \quad (2.1.5)$$

は p の解析関数である。式 (2.1.5) は基準面 λ に変換されても勿論 λ の解析関数である。

さて ここで次の定義をあげよう。

[定義 1]

次の条件を充す λ の解析関数 $W(\lambda) = u(\lambda) + jv(\lambda)$ を 理想伝送量関数と定義する。

i) $\operatorname{Re} W(\lambda) = u(\lambda)$ は λ 面の実軸或は虚軸上の与えられた領域 $B_k \{ \pm b_{2k}, \pm b_{2k+1} \}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) に於て

$$u(\lambda) = A_k \quad (\lambda \in B_k) \quad (2.1.6)$$

となる事。(領域 B_k を汭波領域と言う事がある)

ii) $\operatorname{Re} W(\lambda) = u(\lambda)$ に対して 与えられた有限値の点 a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) に於て

$$\{ u(\lambda) - \log |\lambda - a_i| \}$$

が正則である事。

iii) その他の全ての λ に対して $u(\lambda)$ は正則な調和関数である事。

[定義 2]

定義 1. において 条件 ii) を除いたとき, $W(\lambda)$ を無極理想伝送量関数と定義する。

さて理想伝送量関数について次の定理が成立する。

[定理 1]

理想伝送量関数は第 3 種アベル積分である。又無極伝送量関数は第 1 種アベル積分である。

(証明)

$W(\lambda)$ の実部 $u(\lambda)$ に対して

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\gamma, w) &= \frac{\partial u}{\partial \gamma} \\ \beta(\gamma, w) &= \frac{\partial u}{\partial w} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.7)$$

但し $\lambda = \gamma + jw$

を考へ、これによつて一つの複素関数 $f = \alpha - j\beta$ を作れば、 f は W の定義から明かに、 b_{2k} , b_{2k+1} , a_i 等の点を除いては λ の正則な解析関数である。又点 a_i では 1 位の極を有している。

点 b_{2k} の近傍の領域 U'_k において f は正則であるから f の領域 U_k に解析的に写像される。 U'_k , U_k における局所変数を

$$\left. \begin{aligned} t' &= (\lambda - b_{2k}) \\ t &= (f - f_{2k}) \end{aligned} \right\} \quad (2.1.8)$$

(但し f_{2k} は $\lambda = b_{2k}$ に対応する f の値とする。)

とすれば $t^2 = \varepsilon \cdot t'$ (ε は定数) となっている事が分る。即ち b_{2k} は分岐度 2 の分岐点に外ならない。 $\lambda = b_{2k+1}$ の近傍についても同様である。

かかる解析的近傍の系で定まるリーマン面 R 上の点 P に於て $\lambda(P)$ は正則であり $\frac{d\lambda(P)}{dt}$ の t 展開は恒常的に零とはならない。従つて

$$\psi(P, t) = \frac{f(\lambda, P)}{\frac{d\lambda(P)}{dt}} \quad (2.1.9)$$

は P のみによつて定まる R 上の解析関数である。⁽³⁴⁾ 今 R 上の微分 $\psi \cdot d\lambda$ を考えると $\lambda = a_i$ に対応する R 上の点 P_i において 1 位の極を有し他の点で正則である。即ち $\psi \cdot d\lambda$ は R 上の第三種アベル微分である。さて R 上の解析曲線 T に沿うアベル積分

$$W = \int_T \psi \cdot d\lambda \quad (2.1.10)$$

をとれば、明かに W の実部 u は λ の虚軸上の与えられた領域 B_k で一定値となり定義 1 の三条件を允す。(2.1.10) は第三種アベル積分である。又明かに無極理想伝送量関数は第一種アベル積分である。(証終り)

定理 1 によつて理想伝送量関数を見出すには第三種アベル微分 $\psi \cdot d\lambda$ を見出せばよいことが分る。このアベル微分 $\psi \cdot d\lambda$ は 次の二条件を允すものである。

- i) 与えられた有限個の点 a_i に 1 位の極を有する。
 - ii) 与えられた有限個の点 b_{2k} , b_{2k+1} に分岐度 2 の分岐点を有する。
- 又無極理想伝送量関数に対する第 1 種アベル微分に於ては上記の条件 i) は除か

れる。

かかる $\psi \cdot d\lambda$ は R 面上における極 P_i における留数を与えると一意的に決定される。留数は実現しようとする回路の複雑さ、濾波器に要求される規格等によって適当に定められるものであり、 $\lambda = \alpha_i$ に γ_i 個の減衰極を設けるためには $|\text{Res}_{P_i} \psi \cdot d\lambda| = \gamma_i$ とするのである。(2.2.5 参照)

2.1.3 特性関数及び伝達係数の算出

第1章において述べた如く、濾波回路網を実現するためには、与えられた特性を有する実現可能な伝達係数或は特性関数を見出さねばならない。そのために先ず基準面上において理想伝送量関数 $W(\lambda)$ から一般化特性関数 $\phi(\lambda)$ を求めよう。それに対して次の定理が成立する。

〔定理 2〕

理想伝送量関数 $W(\lambda)$ に対し、その濾波領域 B_K を基準面におけるチエビシエフ近似特性通過域とする濾波器の一つの一般化特性関数 $\phi(\lambda)$ は

$$\phi(\lambda) = H \cdot \cosh W(\lambda) \quad (2.1.11)$$

と表わされる。但し H は適当に選ばれた定数である。

〔証明〕

一般性を失うことなく領域 B_K における u の値 A_K のうち最小のものを零とする。即ち今 $[b_0, b_1]$ に於て $u = 0$ と仮定しよう。先ず $[b_0, b_1]$ で零減衰量特性に対して最大誤差 H をもつチエビシエフ近似となる如き ϕ を求めよう。この様な ϕ に対して W との写像を考察すれば、次の三条件が成立する。

(1) u は ϕ 面の実軸上 $[-H, +H]$ で零である。

(2) u は ϕ 面の無限遠点で対数特異点をもつ。

(3) u は他の全ての ϕ に対して正則な調和関数。

従って定理1から W は ϕ の第三種アベル積分で表わされ、無限遠点の留数を1と定めると、次式の如くなる。

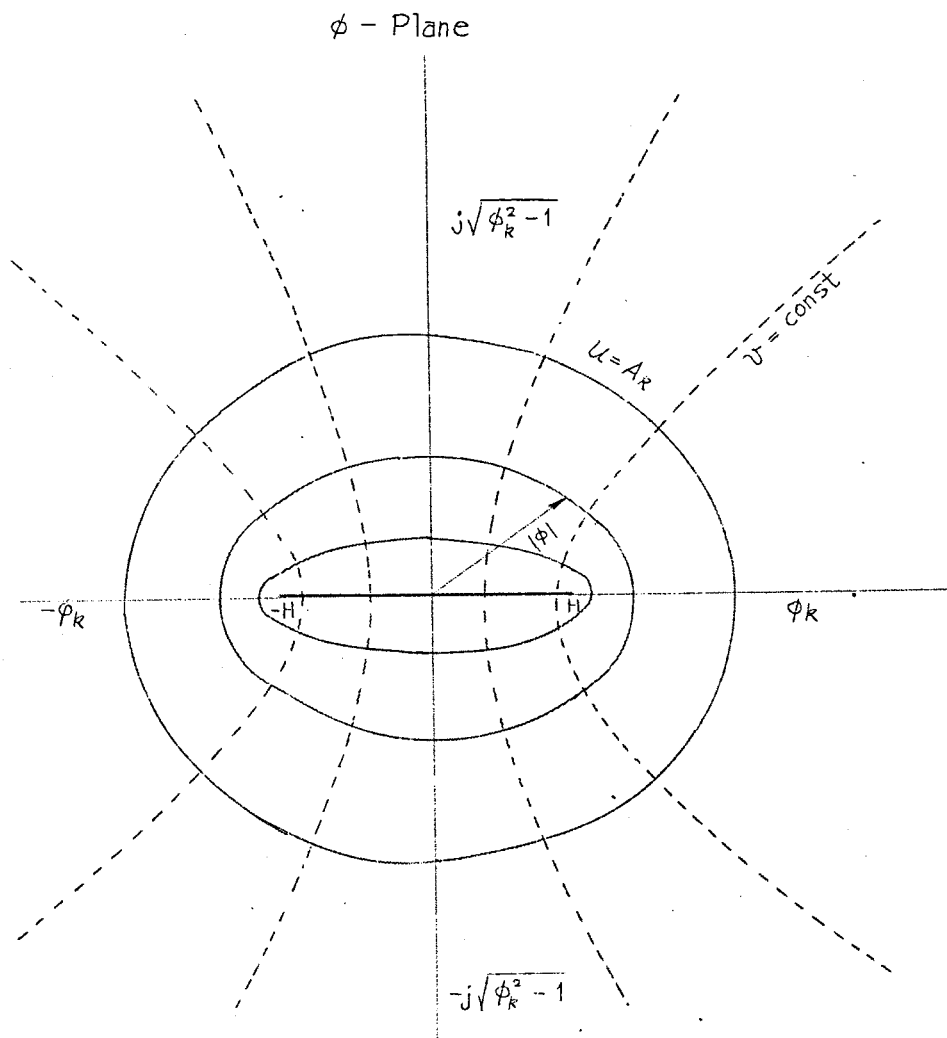
$$W = \int_{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - (\phi^2/H^2)}} \quad (2.1.12)$$

従って

$$W = \cosh^{-1} \left(\frac{\phi}{H} \right) \quad (2.1.13)$$

$$\phi = H \cdot \cosh W \quad (2.1.14)$$

次に他の波領域 $[b_{2k}, b_{2k+1}]$ について考えると式 (2.1.13) 及び式 (2.1.14) により $\text{Re } W = A_k$ なる W 平面上での直線は ϕ 平面に写像すれば 共焦点楕円群に対応する。その様子は第 2.1 図に示される。



第 2.1 図 写像 $\phi = H \cosh W$ の説明図

明かに $|\phi|$ は $\frac{1}{2}(\phi_k + \sqrt{\phi_k^2 - 1})$ なる値に対してチエビシエフ近似となっている。又 w の対数特異点 a_i の近傍は ϕ の無限遠点近傍に写像される。 ϕ と w はそれらが有理的に写像されるリーマン面を介して 1 対 1 に対応している。 w と λ についても全く同様である。従って ϕ と λ についての解析写像について考察すれば、 $\phi(\lambda)$ の代数的特異点は必ず虚軸に対して対称な位置にのみ存在し、渋波領域において与えられた一定値にチエビシエフ近似特性となって居り、且つ与えられた点 a_i に 1 位の極を有するものであるから、これは一般化特性関数に外ならない。(証明終り)

[定理 3]

無極伝送量関数 $w(\lambda)$ の渋波領域 B_k を、基準面におけるチエビシエフ近似特性通過域及び阻止域とする渋波器の一つの一般化特性関数 $\phi(\lambda)$ は

$$\phi(\lambda) = j H \cdot \operatorname{tn}[w(\lambda), L'] \quad (2.1.15)$$

と表わされる。但し H は適当に選ばれた定数である。

[証明]

渋波領域 B_k における u の値 A_k の最小のものを零とし、最大のものを a_m とすれば、定理 2 の証明と同じく ϕ と w の写像を考えると次の三条件が成立する。

- (1) u は ϕ 平面の実軸上の領域 $[-\beta_0, +\beta_0]$ に於て零であること。
- (2) u は ϕ 平面の実軸上の領域 $[\pm\beta_1^{-1}, \infty]$ に於て $u = a_m$ となる事。
- (3) u は他の全ての ϕ に対して正則な調和関数。

このことから 定理 1 に従って w は ϕ の第一種アベル積分で表わされ次の如くなる。

$$w = \int_{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{(\beta_0^2 - \phi^2)(\beta_1^2 \phi^2 - 1)}} \quad (2.1.16)$$

従って

$$\phi = H \cdot \operatorname{sn}(jw, L) = j H \operatorname{tn}(w, L') \quad (2.1.17)$$

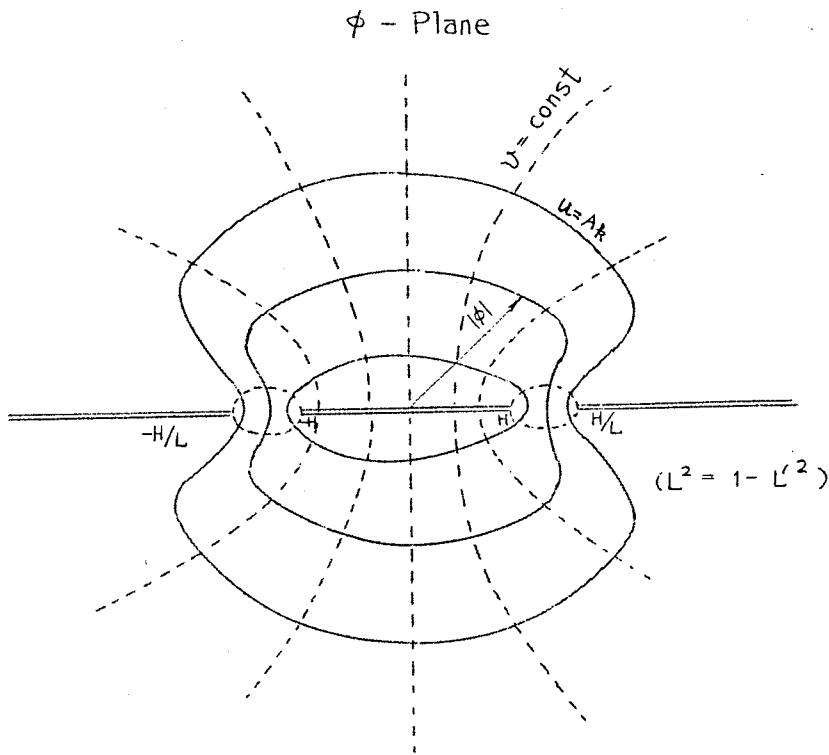
$$\text{但し } L = \beta_0 \beta_1 \quad L' = \sqrt{1 - (\beta_0 \beta_1)^2} \quad H = \beta_0$$

又 β_1^{-1} と a_m とは完全楕円積分

$$a_m = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-L'^2 z^2)}} \quad (2.1.18)$$

によって関係づけられているものである。

次に他の波領域 $[b_{2k}, b_{2k+1}]$ について考えると 式(2.1.16)或は式(2.1.17)により $\text{Re } w = a_k$ なる w 平面上の直線は第2.2図に示す様に ϕ 平面上では 原点に点対称な一つの閉曲線に写像される。原点からその閉曲線に到る半径ベクトル $|\phi|$ の大きさは有界で最小値 $|\phi|_{\min}$ と最大値



第2.2図 写像 $\phi = jH \cdot \text{tn}(w, L')$ の説明図

$|\phi|_{\max}$ の間を振動している。即ち $|\phi|$ は $\frac{1}{2}(|\phi|_{\min} + |\phi|_{\max})$ なる値に対してチェビシエフ近似しているといえる。従って 定理2の場合と全く同様に ϕ は無極理想伝送量関数 w に対応する一般化特性関数に外ならない。

(証明終り)

尚定理2及び定理3に於て波領域の端点において ϕ が $|\phi|_{\min}$ 或は $|\phi|_{\max}$ の値を取る様に w の積分定数を決定するものとする。定理2及び定理3は次の

様に表わすことが出来る。

〔系 1〕

理想伝送量関数 $W(\lambda)$ に対する一般化特性関数 $\phi(\lambda)$ の零点を P_ν とすれば, P_ν は次式の根である。

$$W(\lambda) = j \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \cdot \pi \quad \nu : \text{整数} \quad (2.1.19)$$

〔系 2〕

無限理想伝送量関数 $W(\lambda)$ に対する一般化特性関数 $\phi(\lambda)$ の零点を P_ν とし, その極を Q_μ とすれば, P_ν は

$$W(\lambda) = j 2\nu K \quad \nu : \text{整数} \quad (2.1.20)$$

の根である。又 Q_μ は

$$W(\lambda) = j 2\mu K + K' \quad \mu : \text{整数} \quad (2.1.21)$$

の根として求められる。但し K 及び K' は次式で定まる値である。

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-L^2 z^2)}} \quad L = \beta_0 \beta_1$$

$$K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-L'^2 z^2)}} \quad L' = \sqrt{1-(\beta_0 \beta_1)^2}$$

従って定理 2, 定理 3 によって計算が困難な場合には系 1, 系 2 から (2.1.19) 或は (2.1.20), (2.1.21) の超越方程式を解く方が便利である。

定理 2 或は定理 3 から求められた一般化特性関数 $\phi(\lambda)$ から基準面における基本関係式が得られる。

$$\Theta^*(\lambda^2) = 1 + \Psi^*(\lambda^2) = 1 + \{\phi(\lambda)\}^2 \quad (2.1.22)$$

$$\text{今 } \Theta^*(\lambda^2) = H^2 \frac{g^*(\lambda)g^*(-\lambda)}{f^*(\lambda)f^*(-\lambda)}, \quad \Psi^*(\lambda^2) = H^2 \frac{h^*(\lambda)h^*(-\lambda)}{f^*(\lambda)f^*(-\lambda)}$$

とおけば, 上式は

$$g^*(\lambda) \cdot g^*(-\lambda) = h^*(\lambda) \cdot h^*(-\lambda) + H^{*-2} \cdot f^*(\lambda) \cdot f^*(-\lambda) \quad (2.1.23)$$

と表わされる。但し $g^*(\lambda)$ $h^*(\lambda)$ 及び $f^*(\lambda)$ は λ の多項式で最高次の係数は 1 とする。又定数 H^* は通過域における不整合減衰量から求められるものである。 $h^*(\lambda)$ $f^*(\lambda)$ は共に一般化特性関数 $\phi(\lambda)$ から容易に求まるものであるが、 $g^*(\lambda)$ は式 (2.1.23) の右辺を因数分解することによって求めねばならない。その計算は多くの場合代数方程式の数値解に帰着する。

さて基準面 λ 面と実現面 p 面とは自乗一次変換

$$\lambda^2 = T^2 \frac{p^2 + \gamma_1^2}{p^2 + \gamma_2^2} \quad (2.1.24)$$

によって結ばれているものとして、式 (2.1.22) 或は式 (2.1.23) を変換すれば次式を得る。

$$\bar{G}(p^2) = 1 + \bar{\Psi}(p^2) \quad (2.1.25)$$

或は

$$g(p) \cdot g(-p) = h(p) \cdot h(-p) + H^{*-2} \{g^*(T) \cdot g^*(-T)\}^{-2n_\infty} (p^2 + \gamma_2^2)^{2n_\infty} f(p) f(-p) \quad (2.1.26)$$

但し $\{g(p) \cdot g(-p)\}$ は p^2 の多項式であり、今 λ 面において $\{g^*(\lambda) \cdot g^*(-\lambda)\}$ が

$$\{g^*(\lambda) \cdot g^*(-\lambda)\} = \prod_{\nu} (\lambda^4 - P_{\nu} \cdot \lambda^2 + Q_{\nu}) \quad (2.1.27)$$

と因数分解されているものとすれば、(2.1.26) の左辺は次の様に表わされる。

$$g(p) \cdot g(-p) = \prod_{\nu} (p^4 - F_{2\nu} \cdot p^2 + F_{0\nu}) \quad (2.1.28)$$

$$\begin{cases} F_{2\nu} = \frac{1}{h_{\nu}} \{ T^4 \cdot 2\gamma_1^2 - T^2 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \cdot P_{\nu} + 2\gamma_2^2 \cdot Q_{\nu} \} \\ F_{0\nu} = \frac{1}{h_{\nu}} \{ T^4 \cdot \gamma_1^4 - T^2 \cdot \gamma_1^2 \gamma_2^2 \cdot P_{\nu} + Q_{\nu} \} \\ h_{\nu} = \{ T^4 - T^2 \cdot P_{\nu} + Q_{\nu} \} \end{cases}$$

又 n_∞ は $h(p)$ と $f(p)$ の次数の差とする。

(尚第 2.1 表に述べた幾つかの自乗一次変換に対して式 (2.1.28) が如何に表わされるかを第 2.2 表に示す。)

第2.2表 自乗1次変換による変換公式

変換 1	$\lambda^4 - P_D \lambda^2 + Q_D \longrightarrow h_D \cdot \frac{p^4 - F_{2D} p^2 + F_{0D}}{(k_2 p^2 + 1)^2}$
	$\begin{cases} h_D = \frac{1}{k^4} \cdot \zeta^2 - \frac{k_2^2}{k^2} \zeta \cdot P_D + k_2^4 \cdot Q_D \\ F_{2D} = \frac{1}{h_D} \left\{ -\frac{2}{k^2} \cdot \zeta^2 + \frac{1+k_2^2 \cdot k'^2}{k'^2} P_D \cdot \zeta - 2k_2^2 Q_D \right\} \\ F_{0D} = \frac{1}{h_D} \{ \zeta^2 - P_D \cdot \zeta + Q_D \} \end{cases}$ $\zeta = \frac{1-k_2^2}{1-k'^2} \cdot k'^2$
変換 2	$\lambda^4 - P_D \lambda^2 + Q_D \longrightarrow h_D \cdot \frac{p^4 - F_{2D} \cdot p^2 + F_{0D}}{(k'^2 - 1)^2 p^4}$
	$\begin{cases} h_D = 1 - (k'^2 - 1) P_D + (k'^2 - 1)^2 \cdot Q_D \\ F_{2D} = \frac{1}{h_D} \{ k'^2 (k'^2 - 1) P_D - 2k'^2 \} \\ F_{0D} = \frac{1}{h_D} \{ k'^4 \} \end{cases}$
変換 3	$\lambda^4 - P_D \lambda^2 + Q_D \longrightarrow h_D \cdot \frac{p^4 - F_{2D} \cdot p^2 + F_{0D}}{k_2^2 \cdot p^2 + 1}$
	$\begin{cases} h_D = k_2^4 \{ \zeta^2 - P_D \cdot \zeta + Q_D \} \\ F_{2D} = \frac{k_2^2}{h_D} \{ P_D \cdot \zeta - 2Q_D \} \\ F_{0D} = \frac{1}{h_D} Q_D \end{cases}$ $\zeta = \frac{1-k_2^2}{k_2^2}$
変換 4	$\lambda^4 - P_D \lambda^2 + Q_D \longrightarrow h_D \{ p^4 - F_{2D} \cdot p^2 + F_{0D} \}$
	$\begin{aligned} h_D &= \frac{\zeta^2}{k'^4} \\ F_{2D} &= \frac{1}{h_D \cdot k'^2} \{ -2\zeta^2 + P_D \cdot \zeta \} \\ F_{0D} &= \frac{1}{h_D} \{ \zeta^2 - P_D \cdot \zeta + Q_D \} \end{aligned}$ $\zeta = \frac{k'^2}{1-k'^2}$

さて実現した濾波器の動作減衰量 $A(\omega)$ は (2.1.25) より

$$A(\omega) = 10 \log_{10} |G(p^2)| = 10 \log_{10} |1 + \Psi(p^2)|_{db} \quad (2.1.29)$$

と表わされるが、 p 平面に変換された理想伝送量関数 $w(p)$ によって簡単に求められる。それを定理の形で述べておく。

(定理 4)

p 平面に変換された理想伝送量関数を $w(p)$ とするとき、 $w(p)$ に対応する濾波回路の阻止域における動作減衰量 $A(\omega) (db)$ は次式で評価する事が出来る。

$$A(\omega) = 8.686 \times \left[U(p) \right]_{p=j\omega} - Ae - 6.02 (db) \quad (2.1.30)$$

但し $U(p) = \operatorname{Re} w(p)$ とする。

(証明)

式 (2.1.11) より

$$A(\omega) = 10 \log_{10} \left\{ 1 + H^2 |\cosh w(p)|^2 \right\} \quad (2.1.31)$$

阻止域に於ては $|H \cosh w(p)|^2 \gg 1$ であるから

$$\begin{aligned} A(\omega) &= 10 \log_{10} H^2 |\cosh^2 w(p)| \\ &= 10 \log_{10} (10^{\frac{Ae}{10}} - 1)^{-1} + 20 \log_{10} \left| \frac{e^w + e^{-w}}{2} \right| \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

但し Ae は通過域における最小不整合減衰量であって $H^2 = 10^{\frac{Ae}{10}} - 1$
 $= (10^{\frac{Ae}{10}} - 1)^{-1}$ が成立する事は第1章第1節 (1.3') 式から得られる。

$\operatorname{Re} w$ は阻止域では十分大きい値であり e^{-w} は無視し得るから、結局大な

る ($w(p)$) に対しては

$$A(w) = (20 \log_{10} e) \times (u(p)) - Ae - 20 \log_{10} 2 \quad (2.1.33)$$

が成立し (2.1.30) が導かれる。(証明終り)

尚無極理想伝送量関数に対しても同様な評価が可能である。

即ち式 (2.1.15) 或は式 (2.1.17) より

$$A(w) = 10 \log_{10} \left\{ 1 + H^2 |sn(jw, L)|^2 \right\} \quad (2.1.34)$$

と表わされる。然るに $L = \beta_0 \beta_1$ は極めて小なる値であって、通常 10^{-3} 乃至 10^{-5} 程度の値である。($L \simeq 10^{-\frac{A_s + A_e}{20}}$) 小さい L に対しては

$$sn(jw, L) \cong \sinh w \quad L \ll 1 \quad (2.1.35)$$

($A_s =$ 阻止減衰量)

と表わされるから 阻止域に於て 同様に

$$A(w) = 8.686 \times \left[u(p) \right]_{p=jw} - Ae - 6.02 \text{ db} \quad (2.1.30)$$

と表わされる。但し $\text{Re } w$ が a_m に近づけば (2.1.35) の近似式は成立しなくなり、(2.1.30) の評価式より 6.02 db 少ない値と無限大との間を振動する。即ち

$$A_{\min} = \{ 8.686 \times a_m - Ae - 6.02 \} - 6.02 \text{ db} \quad (2.1.31)$$

$$A(w) \geq A_{\min} \quad w = a_m + jw \quad (2.1.32)$$

となる。何故ならば $\text{Re } w = a_m$ ならば $sn(jw, L) = \frac{1}{L}$ となり $L \ll 1$ なる L に対して

$$L^2 = 16 \cdot g = 16 \cdot e^{-\frac{\pi}{K} \cdot a_m} \simeq 16 \cdot e^{-\frac{a_m}{2}} \quad (\because K \simeq \frac{\pi}{2} \quad L \ll 1)$$

が成立するからである。

尚最後に $g^*(\lambda)$ 或は $g(p)$ を求めるための基本関係式の因数分解の精度について述べておく。 $g(p)$ を求めるためには式 (2.1.23) を因数分解するか、或はその変換表示式 (2.1.26) を因数分解するかの二つの手段がある。今一般化特性関数の計算から $h^*(\lambda)$ 及び $f^*(\lambda)$ の全ての係数が有効桁数 m^* 桁まで求められたものとするれば式 (2.1.23) の右辺の最高有効桁数は

$$m^* + |\log_{10} H^{*-2}| = m^* + \alpha^* \quad (2.1.33)$$

となっている。逆に式(2.1.23)の右辺の全ての係数が $m^* + \alpha^*$ まで知られていれば h^* , f^* は m^* 桁までは正確に求められる。この事から、式(2.1.23)の各項の係数に零を補給して全て $m^* + \alpha^*$ 桁の有効数字として因数分解を遂行し $g^*(\lambda)$ を求めねばならない。同様に式(2.1.26)に於ては $h(p)$, $f(p)$ が式(2.1.28)によって m 桁まで正しく計算されたとき、次式で表わされる桁数まで計算して $g(p)$ を求めねばならない。

$$m + |\log_{10} H^{*-2} \cdot \{g^*(T) g^*(-T)\}^{-2n_{\infty}}| \\ = m + \alpha^* + \beta \quad (2.1.34)$$

$$\text{但し} \quad \beta = |\log_{10} \{g^*(T) \cdot g^*(-T)\}^{-2n_{\infty}}|$$

式(2.1.28) から分る様に $m \simeq m^*$ であるから、式(2.1.26)を因数分解する時には式(2.1.23)を因数分解する場合より β 桁だけ多く有効数字をとらねばならない。

即ち基準面で解けば、 $m^* + \alpha^*$ 桁の有効桁数が必要であるのに対して実現面では、 $m^* + \alpha^* + \beta$ だけの有効桁を必要とする。 T は λ 面から p 面への圧縮率に相当し、通常はかなり大きい値であって β の値は5乃至8程度になる。従って因数分解の計算は λ 面に於て遂行すべきである。

2.1.4 第2.1節の結論

本節では 有限個の通過域に於てチエビシエフ近似特性を示し、阻止域に於て、有限個の減衰極を有するか或はチエビシエフ近似阻止特性を示す如き、濾波回路網の設計問題に対して 極めて一般的基礎理論を述べた。

本節に於ける基礎理論を実際の設計手順に従って要約して示せば次の如くなる。

- 1) 与えられた減衰特性を有する如く 理想伝送量関数 w の分岐点、極その留数を決定する。減衰特性の評価には(2.1.30)式を用い、 w の算出はアペル微分 $\psi d\lambda$ の積分(2.1.10)による。
- 2) 一般化特性関数 $\phi(\lambda)$ を式(2.1.11)或は式(2.1.15)によって求める。

3) 基準面における伝達係数 $g^*(\lambda)$ を見出す。即ち (2.1.23) 式を因数分解する。

4) 自乗一次変換式 (2.1.24) により $\{g^*(\lambda)g^*(-\lambda)\}$ の因数分解式 (2.1.27) を (2.1.28) の如くして $\{g(p)g(-p)\}$ を求める。 $g(p)$ は次式で見出される。

$$g(p) = \prod (p^2 + \sqrt{2\sqrt{F_{0r}} + F_{2r}} \cdot p + \sqrt{F_{0v}})$$

同様にして $h(p)$, $f(p)$ が求められる。

さて以上の操作により p 平面上の関数 $g(p)$, $f(p)$, $h(p)$ が求まれば回路を構成する事が出来るが、それに関する研究については第3章に於て述べる。

第2.2節 通過域を1個有する通過域チエビシエフ特性濾波器の設計理論

2.2.1 理想伝送量関数と一般化特性関数の標準形

前章で述べた一般論を適用して各種の実用的な濾波器の設計法を与えるのが本節の目的である。さて理想伝送量関数と一般化特性関数を用いれば、各種の濾波回路は通過域の数が同一ならば理論的取扱いは全く同一となることは既に述べた。本節では先づ通過域をただ一個有する通過域チエビシエフ特性濾波器の設計基礎論を述べる。

理想伝送量関数 $W(\lambda)$ の標準形として次の様なものを考える。

- 1) 通過域を $[-j, +j]$ とする。
- 2) λ 面上無限遠点も含めて、有限個の減衰極を有する。

減衰極は虚軸及び実軸をも含み且それらと対称な位置にある複素数であってよいが本節では簡単のため、虚軸上有限領域に $2h$ 個、実軸上有限領域に $2k$ 個存在し、且無限遠点に1個存在し、全て原点に対して点対称となっているものとしよう。勿論それらが複素数であっても理論はそのまゝ成立する。

さて前章の一般論よりアベル微分 $\psi(\lambda) \cdot d\lambda$ は次の様なものである。

- 1) 点 $+j$ 及び $-j$ に分岐度2の分岐点を有する。
 - 2) 点 Q_p に1位の極を有し且無限遠点にも1位の極を有している。
- この事からアベル微分 $\psi(\lambda) d\lambda$ は次式で表わされることがわかる。

$$\psi(\lambda) \cdot d\lambda = \left\{ 2\gamma_\infty + \sum_{p=1}^l \frac{2\gamma_p \cdot Q_p \cdot \sqrt{Q_p^2 + 1}}{Q_p^2 - \lambda^2} + \sum_{p=1}^k \frac{2\gamma_p \cdot Q_p \sqrt{Q_p^2 - 1}}{\lambda^2 + Q_p^2} \right\} \cdot \frac{d\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \quad (2.2.1)$$

従って $W(\lambda)$ は

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= \int_{\phi_0}^{\lambda} \psi(\lambda) d\lambda \\ &= 2\gamma_\infty \sinh^{-1} \lambda + \sum_{p=1}^l 2\gamma_p \sinh^{-1} \frac{\sqrt{Q_p^2 + 1} \cdot \lambda}{\sqrt{Q_p^2 - \lambda^2}} \\ &= + \sum_{p=1}^k 2\gamma_p \sinh^{-1} \frac{\sqrt{Q_p^2 - 1} \cdot \lambda}{\sqrt{Q_p^2 + \lambda^2}} + W_0 \quad W_0 = \int_{\phi_0}^0 \psi d\lambda \quad (2.2.2) \end{aligned}$$

と表わされる。ここで $\psi(\lambda)$ によって決定するリーマン面を分岐切断 $[-j, +j]$ により二分して一方の半面を面Ⅰ 他方を面Ⅱとすれば式(2.2.1)及び(2.2.2)における $2\gamma_\infty$, γ_{-p} , γ_p は夫々無限遠点, $\pm Q_{-p}$, $\pm j Q_p$ に対応する面Ⅰ上での $\psi(\lambda) \cdot d\lambda$ の留数である。全リーマン面上では $\sum \text{Res} \{ \psi(\lambda) \cdot d\lambda \} = 0$ であり, 分岐切断を含む閉曲線 Γ に沿う積分即ちアベル積分 $W(\lambda)$ の周期は

$$\int_{\Gamma} \psi(\lambda) \cdot d\lambda = 2\pi \left\{ 2\gamma_\infty + \sum_{p=1}^l 2\gamma_{-p} + \sum_{p=1}^h 2\gamma_p \right\} \quad (2.2.3)$$

となっている。又式(2.2.2)における W_0 は積分定数で積分路のとり方によって定まるものである。

さて式(2.2.2)から 定理2によって一般化特性関数 $\phi(\lambda)$ を見出そう。
先づ式(2.2.2)より

$$\begin{aligned} \exp(W(\lambda)) &= \left\{ \exp \sinh^{-1} \lambda \right\}^{2\gamma_\infty} \prod_{p=1}^l \left\{ \exp \sinh^{-1} \frac{\sqrt{Q_p^2+1} \cdot \lambda}{\sqrt{Q_p^2-\lambda^2}} \right\}^{2\gamma_{-p}} \\ &\quad \cdot \prod_{p=1}^h \left\{ \exp \sinh^{-1} \frac{\sqrt{Q_p^2+1} \cdot \lambda}{\sqrt{Q_p^2+\lambda^2}} \right\}^{2\gamma_p} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

と表わされる。然るに

$$\left\{ \exp \sinh^{-1} Z \right\}^{\pm 1} = \left\{ \sqrt{1+Z^2} \pm Z \right\} \quad (2.2.5)$$

と表わされるから, 式(2.2.4)は次式の如く表わすことが出来る。

$$\exp W(\lambda) = (\sqrt{1+\lambda^2} + \lambda)^{2\gamma_\infty} \prod_{p=1}^l \left\{ \frac{(\sqrt{1+\lambda^2} + m_{-p}\lambda)^2}{Q_{-p}^2 - \lambda^2} \right\}^{\gamma_{-p}} \cdot \prod_{p=1}^h \left\{ \frac{(\sqrt{1+\lambda^2} + m_p\lambda)^2}{Q_p^2 + \lambda^2} \right\}^{\gamma_p} \cdot e^{W_0} (\text{定数}) \quad (2.2.6)$$

但し $m_{-p} = \frac{\sqrt{Q_{-p}^2+1}}{Q_{-p}}, \quad m_p = \frac{\sqrt{Q_p^2+1}}{Q_p}$

若し γ_{-p} 或は γ_p が負ならば

$$\left\{ \frac{(\sqrt{1+\lambda^2} + m_{-p}\lambda)^2}{Q_{-p}^2 - \lambda^2} \right\}^{\gamma_{-p}} = \left\{ \frac{Q_{-p}^2 - \lambda^2}{(\sqrt{1+\lambda^2} + m_{-p}\lambda)^2} \right\}^{|\gamma_{-p}|} = Q_{-p}^{2|\gamma_{-p}|} \cdot \left\{ \frac{(\sqrt{1+\lambda^2} - m_{-p}\lambda)^2}{Q_{-p}^2 - \lambda^2} \right\}^{|\gamma_{-p}|} \quad (2.2.7)$$

と表わすことが出来る。さて定理2により

$$\phi = H \cdot \cosh W(\lambda) = \frac{H}{2} \{ \exp W(\lambda) + \exp(-W(\lambda)) \}$$

と表わされる。上式に式(2.2.26)及び式(2.2.7)を代入して、有理関数部分と無理関数部分にわければ

$$\phi = \begin{cases} H \cdot \frac{R(\lambda) \cosh W_0 + I(\lambda) \sinh W_0}{\prod_{\nu=1}^l (Q_{-\nu}^2 - \lambda^2) \cdot \prod_{\nu=1}^h (Q_{\nu}^2 + \lambda^2)} & \cdots \cdots 2\gamma_{\infty} + \sum_{\nu=1}^l 2\gamma_{-\nu} + \sum_{\nu=1}^h 2\gamma_{\nu} = \text{偶数の場合} \\ H \cdot \frac{I(\lambda) \cosh W_0 + R(\lambda) \sinh W_0}{\prod_{\nu=1}^l (Q_{-\nu}^2 - \lambda^2) \cdot \prod_{\nu=1}^h (Q_{\nu}^2 + \lambda^2)} & \cdots \cdots 2\gamma_{\infty} + \sum_{\nu=1}^l 2\gamma_{-\nu} + \sum_{\nu=1}^h 2\gamma_{\nu} = \text{奇数の場合} \end{cases}$$

となる事がわかる。ここで $R(\lambda)$ 及び $I(\lambda)$ は夫々 λ の有理関数部及び無理関数部であり、又 W_0 は理想伝送量関数の積分定数であり $\lambda = \pm j$ において $|\phi| = H$ となる様に定められるものである。従って第1の場合 $W_0 = 0$ 、第2の場合 $W_0 = j \frac{\pi}{2}$ でよいことがわかる。結局一般化特性関数の標準形は有理関数部分だけとなり次式の如く表わされる。

$$\phi(\lambda) = H' \frac{R_a \left\{ (\sqrt{1+\lambda^2} + m_{\infty} \lambda)^{2|\gamma_{\infty}|} \prod_{\nu=1}^l (\sqrt{1+\lambda^2} + m_{-\nu} \lambda)^{2|\gamma_{-\nu}|} \prod_{\nu=1}^h (\sqrt{1+\lambda^2} + m_{\nu} \lambda)^{2|\gamma_{\nu}|} \right\}}{\prod_{\nu=1}^l (\lambda^2 - Q_{-\nu}^2)^{|\gamma_{-\nu}|} \cdot \prod_{\nu=1}^h (\lambda^2 + Q_{\nu}^2)^{|\gamma_{\nu}|}} \quad (2.2.8)$$

但し

$$m_{\infty} = \begin{cases} 1 & \cdots \gamma_{\infty} > 0 \\ -1 & \cdots \gamma_{\infty} < 0 \end{cases}, \quad m_{-\nu} = \begin{cases} \frac{\sqrt{Q_{-\nu}^2 + 1}}{Q_{-\nu}} & \cdots \gamma_{-\nu} > 0 \\ -\frac{\sqrt{Q_{-\nu}^2 + 1}}{Q_{-\nu}} & \cdots \gamma_{-\nu} < 0 \end{cases}, \quad m_{\nu} = \begin{cases} \frac{\sqrt{Q_{\nu}^2 - 1}}{Q_{\nu}} & \cdots \gamma_{\nu} > 0 \\ -\frac{\sqrt{Q_{\nu}^2 - 1}}{Q_{\nu}} & \cdots \gamma_{\nu} < 0 \end{cases}$$

$$H' = \frac{\left(\prod_{\nu=1}^l Q_{-\nu}^{2|\gamma_{-\nu}|} \right) \left(\prod_{\nu=1}^h Q_{\nu}^{2|\gamma_{\nu}|} \right)}{\sqrt{10^{Ae}} - 1}$$

Ae は通過域最小不整合減衰量であり、又 R_a はその関数の有理関数部分とすることを意味するものとする。さて一般化特性の性質から $2\gamma_{\infty}$ 及び γ_{ν} は整数でなければならぬ。一方 $\gamma_{-\nu}$ のみが (整数)/2 となり得る。そのときは一般化特性関数 $\phi(\lambda)$ は実軸に分岐点を有することになる。

入面における減衰特性を $A(\lambda)$ db とすれば、夫は式(2.1.30)及び式(2.2.2)から次式で示される。

$$A(\omega) = 17.3718 \left\{ \gamma_{\infty} \cdot A_{\infty}(\omega) + \sum_{p=1}^l \gamma_{-p} \cdot A_{-p}(\omega) + \sum_{p=1}^h \gamma_p \cdot A_p(\omega) \right\} - 6.02 - Ae \quad (2.2.9)$$

但し $\lambda = j\omega$

$$\begin{cases} A_{\infty}(\omega) = \operatorname{Re}(\sinh^{-1} j\omega) \\ A_{-p}(\omega) = \operatorname{Re}\left(\sinh^{-1} \frac{\sqrt{Q_p^2 + 1} \cdot j\omega}{\sqrt{Q_p^2 + \omega^2}}\right) \\ A_p(\omega) = \operatorname{Re}\left(\sinh^{-1} \frac{\sqrt{Q_p^2 - 1} \cdot j\omega}{\sqrt{Q_p^2 - \omega^2}}\right) \end{cases} \quad (2.2.10)$$

濾波器に与えられた特性に対して $A(\omega)$ を近似させるべく、式(2.2.9)、式(2.2.10)よりパラメーター γ_{∞} 、 γ_{-p} 、 γ_p を定めることが出来るわけである。又パラメーター Ae を \times db だけ減少或は増加すれば $A(\omega)$ は阻止域の全域にわたって \times db だけ増加又は減少することを意味している。この関係に注目しつつ又濾波器使用上の終端条件等を考慮して Ae を定める。

2.2.2 低域通過濾波器の場合

前節の標準形をそのまま実現面とみなして、伝達係数特性関数を見出し実現すれば、 $p (= \lambda)$ 面の虚軸上 $[-j, +j]$ を通過域とし λ の実軸上に減衰極を有する低域濾波器が導かれる。 $l = 0$ とすれば、即ち実軸上の極を零とすれば通常の低域濾波器となり $\lambda = \pm 1$ に多重極をおけば分岐定数形濾波器が得られるわけである。

この濾波器の減衰量特性は前節の標準形(2.2.9)そのもので示される。尚阻止域は $[\pm j\infty]$ であるから $A_{\infty}(\omega)$ 、 $A_{-p}(\omega)$ 及び $A_p(\omega)$ は次の様に表示出来る。

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{\infty}(\omega) = \tanh^{-1} \frac{\sqrt{\omega^2 - 1}}{\omega} \quad \text{-----} \quad 1 < \omega \\ A_p(\omega) = \begin{cases} \tanh^{-1} \left| \frac{1}{m_p} \cdot \frac{\sqrt{\omega^2 - 1}}{\omega} \right| & \text{-----} \quad 1 < \omega < Q_p \\ \coth^{-1} \left| \frac{1}{m_p} \cdot \frac{\sqrt{\omega^2 - 1}}{\omega} \right| & \text{-----} \quad Q_p < \omega \end{cases} \\ A_{p'}(\omega) = \tanh^{-1} \left| \frac{1}{m_{p'}} \cdot \frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega} \right| \quad \text{-----} \quad 1 < \omega \end{array} \right. \quad (2.2.11)$$

$A_{p'}$ を除いては 0. Zobel の映像パラメータ—濾波器の映像減衰量と同一であり、従って本節の動作パラメータ—濾波器設計法は S. Darlington⁽¹⁾ による参考濾波法による理論に外ならない。又 $A_{p'}(\omega)$ に相当する映像パラメータ減衰量は存在しない点が異なる。 $A_{p'}$ は通常は零とするが特別な場合に必要である。(2.2.5 参照)

本節に述べた方法は従来知られた方法を含むものであるが、前章の基礎理論の一つの適用例として述べた。その設計手順を簡単に述べておく。

1) 基本方程式を解く。

$$h(\lambda) \cdot h(-\lambda) + H^{-2} \prod (Q_p^2 + \lambda^2)^{2|x_p|} = G_0 \prod_{\mu} (\lambda^2 - q_{\mu}) \cdot \prod_p (\lambda^4 - P_p \lambda^2 + q_p) \quad (2.2.12)$$

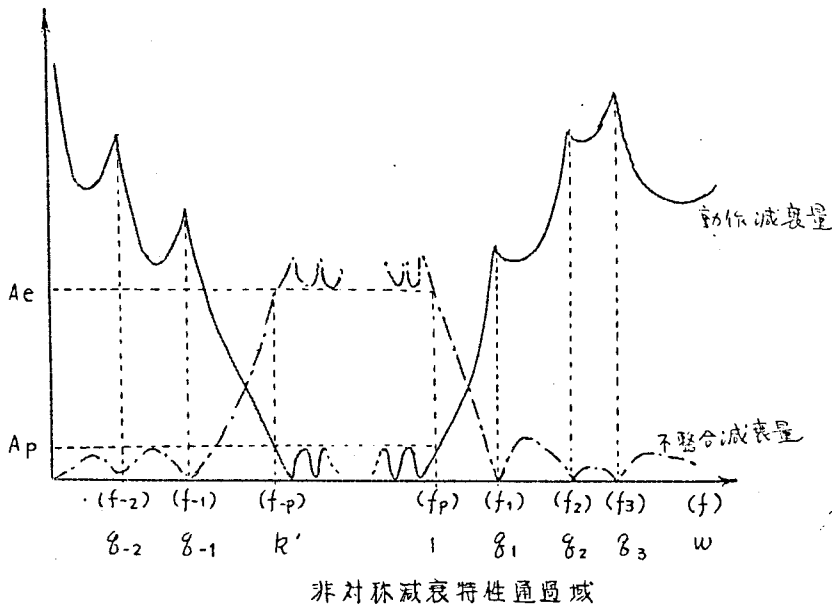
$$\left. \begin{array}{l} \text{但し} \quad h(\lambda) = \text{Re} \left\{ (\sqrt{1+\lambda^2} + m_{\infty} \lambda) \prod (\sqrt{1+\lambda^2} + m_p \lambda)^{2|x_p|} \right\} \\ H = \frac{\prod Q_p^{2|x_p|}}{\sqrt{10^{\frac{A_0}{10}} - 1}} \end{array} \right\}$$

2) 伝達係数を求める

$$g(\lambda) = \prod (\lambda + \sqrt{q_{\mu}}) \prod (\lambda^2 + \sqrt{2\sqrt{q_p} + P_p} \cdot \lambda + \sqrt{q_p}) \quad (2.2.13)$$

但し q_{μ} に相当する項が存在しない場合には $\{\prod (\lambda + \sqrt{q_{\mu}})\}$ の項を除く。

2.2.3 帯域通過濾波器の場合



第 2.3 図 Tchebycheff 帯域濾波器

周知のようにリアクタンス変換によって低域濾波器から減衰特性が対称な帯域通過濾波器を得る事が可能である。然しこの様な濾波器は素子の数が多く必要であり、且実際にも要求される減衰規格は通常周波数に対して非対称な場合が殆んどであり、これらの点から減衰特性が上下阻止域に於て非対称であり通過域特性がチエビシエフ的な濾波器が望まれて来た。
亦2.3図に示す様な非対称減衰特性濾波器が望まれて来た。

[2.2.1] の標準形に対して [2.1.1] に述べた自乗一次変換「第4変換」(第1表)を適用すればその様な帯域濾波器が容易に実現出来るのである。即ち変換

$$\lambda^2 = \frac{p^2 + K^2}{1 - k'^2} \quad (2.2.14)$$

によって 基準面 λ 面を實現面 p 面に変換すれば 通過域 $(\pm j k', \pm j)$ においてチエビシエフ近似となり任意の点に減衰極を有する非対称減衰特性帯域濾波器が得られるのである。

設計にあたっては先づ實現面 $p (= \gamma + jw)$ における減衰特性 $A(w)$ を評価しなければならぬ。 $A(w)$ は (2.2.19) から 次の様に表わされる。

$$A(w) = 17.3718 \left\{ \gamma_0 \cdot A_0(w) + \gamma_\infty A_\infty(w) + \sum_{\nu=1}^p \gamma_{-\nu} \cdot A_{-\nu}(w) + \sum_{\nu=1}^h \gamma_\nu \cdot A_\nu(w) \right\} - 6.02 - Ae \quad (2.2.15)$$

但し

$$A_0(w) = \begin{cases} \coth^{-1} k \cdot Q(w) & \text{----- } w < k' \\ \tanh^{-1} k \cdot Q(w) & \text{----- } 1 < w \end{cases}$$

$$A_\infty(w) = \begin{cases} \coth^{-1} Q(w) & \text{----- } w < k' \\ \tanh^{-1} Q(w) & \text{----- } w > 1 \end{cases}$$

$$A_{-\nu}(w) = \begin{cases} \tanh^{-1} \left| \frac{1}{m_{-\nu}} \cdot Q(w) \right| & \text{----- } w < g_{-\nu} \\ \coth^{-1} \left| \frac{1}{m_{-\nu}} \cdot Q(w) \right| & \text{----- } g_{-\nu} < w < k' \\ \tanh^{-1} \left| \frac{1}{m_{-\nu}} \cdot Q(w) \right| & \text{----- } 1 < w \end{cases}$$

$$A_\nu(w) = \begin{cases} \coth^{-1} \left| \frac{1}{m_\nu} \cdot Q(w) \right| & \text{----- } w < k' \\ \tanh^{-1} \left| \frac{1}{m_\nu} \cdot Q(w) \right| & \text{----- } 1 < w < g_\nu \\ \coth^{-1} \left| \frac{1}{m_\nu} \cdot Q(w) \right| & \text{----- } g_\nu < w \end{cases}$$

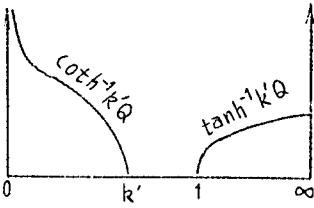
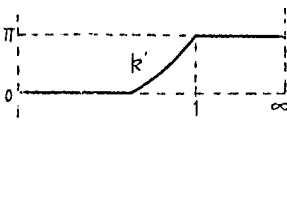
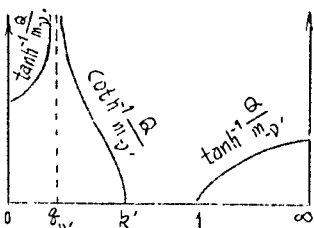
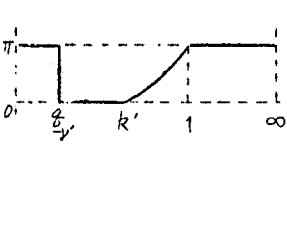
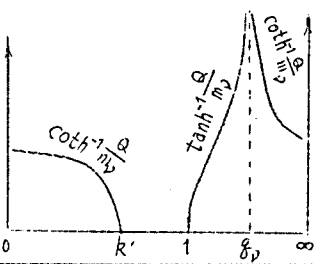
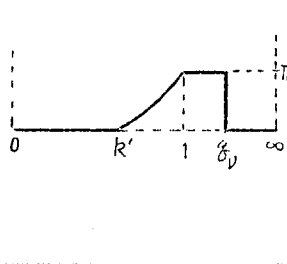
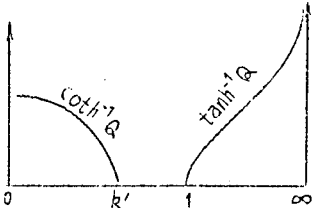
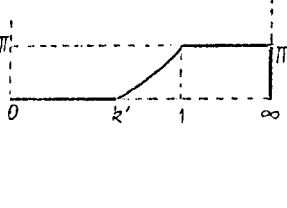
$$Q(w) = \sqrt{\left| \frac{1-w^2}{k'^2-w^2} \right|}$$

式(2.2.15)においては上部阻止域に減衰極 g_ν をもち、下部阻止域に減衰極 $g_{-\nu}$ が存在するものとし、無限遠点に $2\gamma_\infty$ 位の減衰極、原点に $2\gamma_0$ 位の減衰極を考えている。 g_ν , $g_{-\nu}$, 及び p 面の原点は基準面においては次の様に表わされる。

$$Q_\nu^2 = \frac{g_\nu^2 - k'^2}{1 - k'^2}, \quad Q_{-\nu}^2 = \frac{k'^2 - g_{-\nu}^2}{1 - k'^2}, \quad Q_0^2 = \frac{k'^2}{1 - k'^2} \quad (2.2.16)$$

実際の設計にあたっては (2.2.15) から 要求規格を充す様に各種パラメータを決定する。(2.2.15)の各項の行状を第2.3表に示す。

第2.3表 帯域濾波器の動作減衰量の算出公式

	$0 < \omega < k'$	$1 < \omega$	減 衰 特 性	位 相 特 性
$A_p(\omega)$	$\coth^{-1} k' \cdot Q(\omega)$	$\tanh^{-1} k' \cdot Q(\omega)$		
$A_p(\omega)$	$\tanh^{-1} \frac{1}{m_p} \cdot Q(\omega)$ ($\omega < \xi_p$) $\coth^{-1} \frac{1}{m_p} \cdot Q(\omega)$ ($\xi_p < \omega < k'$)	$\tanh^{-1} \frac{1}{m_p} \cdot Q(\omega)$		
$A_p(\omega)$	$\coth^{-1} \frac{1}{m_p} \cdot Q(\omega)$	$\tanh^{-1} \frac{1}{m_p} \cdot Q(\omega)$ ($1 < \omega < \xi_p$) $\coth^{-1} \frac{1}{m_p} \cdot Q(\omega)$ ($\xi_p < \omega$)		
$A_p(\omega)$	$\coth^{-1} Q(\omega)$	$\tanh^{-1} Q(\omega)$		

尚 (2.2.15) を \tanh の加法定理^{*}を適用することにより 次式の如く表わすことが出来る。

$$\tanh \left(a + a_e + \log_e 2 \right) = \frac{U(t; m_p)}{G(t; m_p)} \quad (2.2.17)$$

但し

$$t^2 = \frac{1 - \omega^2}{k'^2 - \omega^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{且 } G(t; m_p) \text{ 及び } U(t; m_p) \text{ は多項式 } \prod (t + m_p) \text{ の偶関数部及び奇関} \\ \text{数部の多項式であって, } n = (2 \sum \gamma_p + 2 \sum \gamma_p + 2 \gamma_\infty + 2 \gamma_0) \text{ とすれば} \\ \prod^n (t + m_p) = t^n + a_{n-1} t^{n-1} + a_{n-2} t^{n-2} + \dots + a_1 t + a_0 \\ = G(t; m_p) + U(t; m_p) \end{array} \right.$$

と表わされる。又 a 及び a_c は ネーパーで表わされた阻止減衰量及び
通過域最小不整合減衰量であるものとする。

与えられた周波数で与えられた減衰量をとる如くパラメーター m_p を求める問
題は式 (2.2.17) に於て 左辺を与えて右辺の有理式の未定係数を求める問題に
帰着せしめ得る。これを逐次近似的に解くには

- 1) パラメーター m_p の第1近似の組 $\{m_p\}_1$ に対して t の関数
 $\{G(t; m_p) \cdot U'(t; m_p) - G'(t; m_p) \cdot U(t; m_p)\} = 0$ の根 t_p を

※) \tanh の加法定理

$$\tanh(\sum \theta_p) = F(\tanh \theta_p)$$

に於ては、次の条件が成立せねばならない。

- $$\left\{ \begin{array}{l} 1) F(\tanh \theta_p) \text{ は } \tanh \theta_p \text{ に対して有理的である。} \\ 2) \text{ 任意の } \theta_p \text{ に対して } \theta_p \rightarrow \infty : F(\tanh \theta_p) \rightarrow 1 \\ 3) \text{ 全ての } \theta_p \text{ に対して } \theta_p = 0 : F(\tanh \theta_p) = 0 \end{array} \right.$$

従って 式 $\prod (1 - \tanh \theta_p)$ を正項部と負項部とに分離して

$$\prod (1 - \tanh \theta_p) = G(\tanh \theta_p) - U(\tanh \theta_p)$$

とすれば

$$F(\tanh \theta_p) = \frac{U(\tanh \theta_p)}{G(\tanh \theta_p)}$$

が成立する事がわかる。 $\tanh \theta_p = \frac{t}{m_p}$ とすれば式 (2.2.17) を得る。

求める。但し U' , G' は t に関する微分を意味する。

2) $t = t_p$ に対して $W_p \cdot G(t_p; m_p) - U(t_p; m_p) = 0$ なる連立 1 次方程式を解き新しいパラメーター m_p の組 (第 2 回目の近似値) $\{m_p\}_2$ を求める。

但し $W_p = \{ \tanh(a(t_p) + a_e + \log_e 2) \}^{(-1)^p}$ とする。 $a(t_p)$ は $t = t_p$ に対する減衰規格値であり、 t_p は大きさの順に番号がつけられているものとする。

3) 新しい近似値 $\{m_p\}_2$ について同様な計算を繰返す。

さて以上述べた事により 各パラメーター m_p , γ_p , A_e 等が定まれば特性関数、伝達係数を算出する事が出来る。その具体的手順を次に示す。

1) 基本方程式の因数分解 : —

$$\begin{aligned} h^*(\lambda) h^*(-\lambda) + H^{*-2} \cdot (Q_0^2 - \lambda^2)^{2|\gamma_0|} \prod_{\nu=1}^l (Q_{-\nu}^2 - \lambda^2)^{2|\gamma_{-\nu}|} \prod_{\nu=1}^h (Q_{\nu}^2 + \lambda^2)^{2|\gamma_{\nu}|} \\ = G_0 \prod_{\mu} (\lambda^2 - q_{\mu}) \prod_{\nu} (\lambda^4 - P_{\nu} \lambda^2 + q_{\nu}) \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

但し

$$\begin{aligned} h^*(\lambda) = R_a \left[(\sqrt{1+\lambda^2} + m_0 \lambda)^{2|\gamma_0|} \cdot (\sqrt{1+\lambda^2} + m_{\infty} \lambda)^{2|\gamma_{\infty}|} \cdot \prod_{\nu=1}^l (\sqrt{1+\lambda^2} + m_{-\nu} \lambda)^{2|\gamma_{-\nu}|} \right. \\ \left. \cdot \prod_{\nu=1}^h (\sqrt{1+\lambda^2} + m_{\nu} \lambda)^{2|\gamma_{\nu}|} \right] \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

$$H^{*-2} = \frac{(10^{\frac{A_e}{10}} - 1)}{\{Q_0^{|\gamma_0|} \prod_{\nu} Q_{-\nu}^{|\gamma_{-\nu}|} \prod_{\nu} Q_{\nu}^{|\gamma_{\nu}|}\}^4} \quad (2.2.20)$$

2) $S(p)$ の算出 : —

$$S(p) = H \cdot \frac{g(p)}{f(p)}$$

$$g(p) = \prod_{\mu} (p + \sqrt{q_{\mu}(1-k^2) - k^2}) \cdot \prod_{\nu} (p^2 + \sqrt{2F_{0\nu} + F_{2\nu}} \cdot p + \sqrt{F_{0\nu}}) \quad (2.2.21)$$

$$\begin{cases} F_{2\nu} = (1-k^2) \cdot P_{\nu} - 2k^2 \\ F_{0\nu} = (1-k^2)^2 \cdot \left\{ \left(\frac{k^2}{1-k^2} \right)^2 - P_{\nu} \left(\frac{k^2}{1-k^2} \right) + q_{\nu} \right\} \end{cases}$$

$$f(p) = p^{2l_0} \cdot \prod_{\nu=1}^l (p^2 + g_{\nu}^2) \cdot \prod_{\nu=1}^h (p^2 + g_{\nu}^2) \quad (2.2.22)$$

3) $\varphi(p)$ の算出 : —

$$\varphi(p) = H \cdot \frac{h(p)}{f(p)}$$

多項式 $h(p)$ は基準面における $h^*(\lambda)$ の変換から求められるものである。
今 $h^*(\lambda)$ が 2 次偶多項式であって

$$h^*(\lambda) = h_0^*(\lambda^{2n} + a_{n-1}\lambda^{2(n-1)} + a_{n-2}\lambda^{2(n-2)} + \dots + a_1\lambda^2 + a_0) \quad (2.2.23)$$

と表わされるものとすれば, $h(p)$ は次の如く表わされる。

$$h(p) = p^{2n} + b_{n-1}p^{2(n-1)} + b_{n-2}p^{2(n-2)} + \dots + b_1p^2 + b_0. \quad (2.2.24)$$

係数 $\{b_{n-s}\}$ は次の変換行列によって $\{a_{n-r}\}$ から変換される。

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k^2 & k^4 & k^6 & k^8 & \dots & k^{2n} \\ 0 & 1 & 2k^2 & 3k^4 & 4k^6 & \dots & n k^{2(n-1)} \\ 0 & 0 & 1 & 3k^2 & 6k^4 & \dots & n C_{n-2} k^{2(n-2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4k^2 & \dots & n C_{n-3} k^{2(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2k^2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 R^n \\ a_1 R^{n-1} \\ a_2 R^{n-2} \\ a_3 R^{n-3} \\ \vdots \\ a_{n-1} R \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.25)$$

$$\text{即ち} \quad (b_{n-s}) = (r C_s k^{2s}) (a_{n-r} \cdot R^r)$$

但し

$$R = (1 - k^2)$$

尚 $h(p)$ が p の実根を有すれば, 即ち $(p^2 - p_\alpha^2)$ なる因子を含めば, $(p^2 - p_\alpha^2)$ の代りに $(p \pm p_\alpha)^2$ を代入した多項式 (これはもはや偶多項式ではない) を $h(p)$ に採用してもよい。又一般に $h^*(\lambda)$ が式 (2.2.16) における Q_0 より大きい絶対値をもつ λ の実根及び一般に複素根を有する時は, $h^*(\lambda)$ を二つの多項式 $h_1^*(\lambda)$ 及び $h_2^*(\lambda)$ に因数分解し, $h_1^*(\lambda)$ は λ の純虚

根及び 0。より小なる実根をもつ偶多項式とし、 $h_2^*(\lambda)$ は残りの多項式とすれば、 $h_1^*(\lambda)$ については式(2.2.23)の如く表わされ式(2.2.25)により $h_1(p)$ に変換することが出来る。 $h_2^*(\lambda)$ については $h_2^*(\lambda) h_2^*(-\lambda)$ の因数分解式から式(2.2.21)と全く同様にして $h_2(p)$ が得られる。 $h_1(p)$ は p の虚根のみを有する偶多項式であり、 $h_2(p)$ は p の実根又は複素根を有する多項式である。 $h(p)$ は $h_1(p) \times h_2(p)$ として表わされる。 $h_2(p)$ は必ずしも Hurwitz 多項式である必要はなく多様に決定され、それに応じて多くの等価回路が実現出来る。それらは同一の動作減衰特性を与えるが、入出力インピーダンスの行状が異っている。従って入出力インピーダンスの要求、回路網の動作時の接続状態によって $h_2(p)$ は適当に選ばれるべきである。

2.2.4 帯域阻止濾波器の場合

実用上の見地から減衰特性が周波数に対して非対称である帯域阻止濾波器が望まれる。しかし この様な帯域阻止濾波器は従来知られていない。帯域阻止濾波器は上部通過域と下部通過域を有し本質的には複通過域形の濾波器である。

これに対し p 平面の実軸をも通過域と考えることにより 単通過形とみなすことが可能であり、第1節の標準形から自乗一次変換によって実現出来るのである。かかる自乗一次変換としては λ 面の領域 $[-j, +j]$ を p 面の虚軸上の阻止域を除く全領域及び全実軸上に写像するものであればよい。この事から自乗一次変換

$$\lambda^2 = \frac{k'^2 - \alpha^2}{1 - k'^2} \cdot \frac{1 + p^2}{\alpha^2 + p^2} \quad (2.2.26)$$

が得られる。 α は $k' < \alpha < 1$ なる任意の定数であり、 λ 面の無限遠点が p 面の点 $\pm j\alpha$ に写像されているのである。

さて(2.2.26)によって実現面 $p (= \gamma + j\omega)$ における減衰特性 $A(\omega)$ は次式で求められる。

$$A(\omega) = 17.3718 \left\{ \sum_p \gamma_p A_p(\omega) \right\} - 6.02 - A_e \quad (2.2.27)$$

$$A_p(\omega) = \begin{cases} \tanh^{-1} \frac{1}{m_p} \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2-k'^2}} \sqrt{\frac{\omega^2-k'^2}{1-\omega^2}} & \dots\dots\dots k' < \omega < g_p \\ \coth^{-1} \frac{1}{m_p} \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2-k'^2}} \sqrt{\frac{\omega^2-k'^2}{1-\omega^2}} & \dots\dots\dots g_p < \omega < 1 \end{cases} \quad (2.2.28)$$

$$m_p = \sqrt{\frac{(1-\alpha^2)(g_p^2 - k'^2)}{(\alpha^2 - k'^2)(1 - g_p^2)}}$$

今定数 α を

$$\alpha^2 = \frac{1+k'^2}{2} \quad (2.2.29)$$

によって定めれば (2.2.28) は一層簡単に表わされる。その時 自乗一次変換は

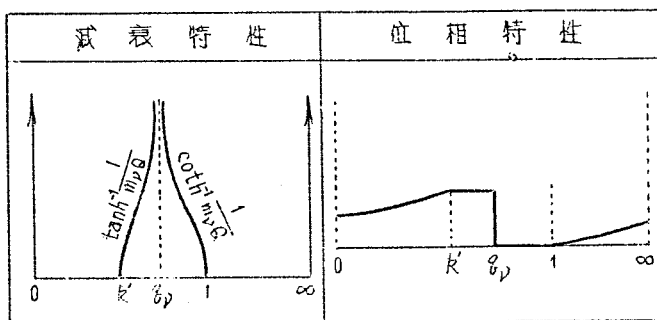
$$\lambda^2 = \frac{1+p^2}{1+k'^2+2p^2} \quad (2.2.30)$$

となり、 $A_p(w)$ は

$$A_p(w) = \begin{cases} \tanh^{-1} \frac{1}{m_p} \sqrt{\frac{w^2 - k'^2}{1 - w^2}} & \text{----- } k' < w < g_p \\ \coth^{-1} \frac{1}{m_p} \sqrt{\frac{w^2 - k'^2}{1 - w^2}} & \text{----- } g_p < w < 1 \end{cases} \quad (2.2.31)$$

$$m_p = \sqrt{\frac{w^2 - k'^2}{1 - g_p^2}}$$

と表わされる。 $A_p(w)$ の大体の行状は第 2.4 図に示される。上式によって各パラメーター m_p , g_p , A_e 等を定めて特性関数、伝達係数を算出する事が出来る。それには先づ帯域通過回路の場合と全く同様に基本方程式 (2.



第 2.4 図 帯域阻止回路の動作減衰特性

2.18) を因数分解する。然る後式 (2.1.28) 或は式 (2.2.21) に相当して次式により $g(p)$ を求める。

$$g(p) = \prod_p (p^2 + \sqrt{2\sqrt{F_{0p}} + F_{2p}} \cdot p + \sqrt{F_{0p}}) \quad (2.2.32)$$

$$\begin{cases} F_{2p} = \frac{1}{h_p} [2 + (3+k'^2) \cdot R_p + 4(1+k'^2) g_p] \\ F_{0p} = \frac{1}{h_p} [1 + (1+k'^2) \cdot R_p + 4 g_p] \\ h_p = 1 + 2 R_p + 4 g_p \end{cases}$$

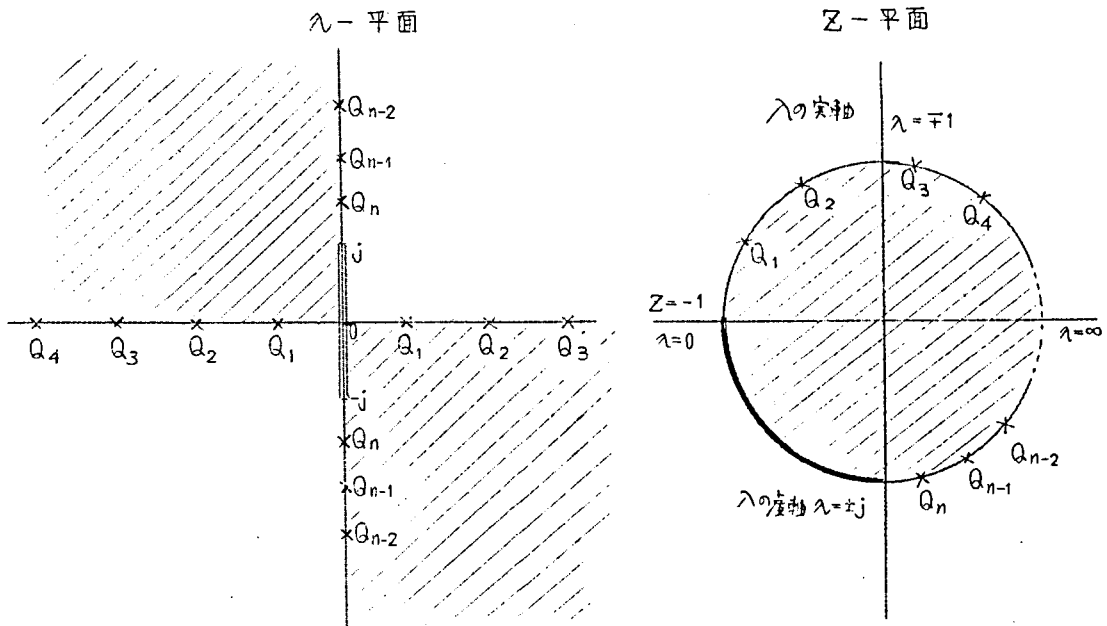
又 $h(p)$ は $h^*(\lambda)$ が λ^2 の関数ならば式 (2.2.26) を代入して求められる。その際前節と同様に $(p^2 - p_\alpha^2)$ なる因子を含めば $(p^2 - p_\alpha^2)$ の代りに $(p \pm p_\alpha)$ を代入してもよい。 $h^*(\lambda)$ が λ の複素根を有すればその部分のみについて式 (2.2.30) を適用すればよい事も前節と同様である。

2.2.5 理想伝送量関数に関する留数の決定法について

前項までに述べた様に一般化特性関数について考える限り、基準面の虚軸上の減衰極も実軸上の減衰極も全く同等に取り扱い得る。今 λ 平面を变换

$$Z = \frac{\lambda^2 + j}{\lambda^2 - j} \quad (2.2.33)$$

によって Z 平面に写像すれば、 λ 平面の実軸及び虚軸は第 2.5 図に示す様に Z 平面上の単位円に写像され、 λ 平面の斜線で示す象限は Z 平面の単位円内部に写像



第 2.5 図 写像 $Z = \frac{\lambda^2 + j}{\lambda^2 - j}$ の説明図

されるのである。理想伝送量関数 $W = u + jv$ の極は λ 平面上では虚軸及び実軸上にのみ存在するものとする。乙-平面上では単位円上に配列される。今理想伝送量関数の極に対して乙面上の点 $z = -1$ から単位円上に時計方向に番号をつけるものとする。(第2.5図参照) さて i 番目の極の留数を γ_i とするとき次の補助定理が成立する。

〔補助定理 1〕

理想伝送量関数の虚部 v は乙平面の単位円上に配列された i 番目の極と $(i+1)$ 番目の極の間における領域(乙面の実軸或は虚軸)において次の値をとる。

$$v = \begin{cases} \pi \cdot \left\{ \sum_{\nu=1}^i \gamma_{\nu} \right\} & \cdots \cdots 2 \sum_{\nu=1}^n \gamma_{\nu} = \text{偶数の場合} \\ \pi \cdot \left\{ \sum_{\nu=1}^i \gamma_{\nu} + \frac{1}{2} \right\} & \cdots \cdots 2 \sum_{\nu=1}^n \gamma_{\nu} = \text{奇数の場合} \end{cases} \quad (2.2.34)$$

〔証明〕

$W = \int_{\phi} \psi d\lambda = u + jv$ は 実軸及び虚軸に沿って積分路をとり極 Q_p を越える毎にその虚部は $j\pi\gamma_p$ ずつ増加し、実軸及び虚軸の他の領域で一定である。又 $W(0) = W_0$ は第2章第1節に於て述べた如く $2 \sum_{\nu=1}^n \gamma_{\nu} = \text{偶数}$ の場合零であり、 $2 \sum_{\nu=1}^n \gamma_{\nu} = \text{奇数}$ の場合 $j\frac{\pi}{2}$ である。従って式(2.2.34)が成立する。
(証終り)

今通過域における減衰零点の数を r とすれば、上の補助定理及び定理2より

$$r = 2 \sum_{\nu=1}^n \gamma_{\nu} \quad (2.2.35)$$

となる。又回路の次数 N は 2.2.1 における式(2.2.8)から容易に分る様に

$$N = 2 \sum_{\nu=1}^n |\gamma_{\nu}| \quad (2.2.36)$$

と表わされる。 γ_{ν} が全て正ならば $r = N$ となり、この場合特性関数 ψ の零点は全て通過域上に存在する。 γ_{ν} のうちのいくつかを負ならば ψ の零点の一部は一般に複素数となり通過域上の零点は減少するが矢張り伝送特性は等偏差的特性となっている。 $r = 0$ ならばもはや通過域上に ψ の零点は1個も存在しない

が通過域上の不整合減衰量は定められた値 A_e より小とならない。 γ_p の選び方により種々の濾波回路を得る事が出来る。以下本節において実用上有用と思われる結果について定理の形で述べておく。

[定理 4]

帯域濾波器の下部阻止域減衰極に関する γ_p を負とし且原点に於て $2\gamma_{\lambda=0} =$ 奇数 とすれば、この帯域濾波器の伝達係数は2個の負実根を有する。

[証 明]

この帯域濾波器の基準面上の理想伝送量関数 w は λ の実軸上に於て $\text{Re } w = 0$ となる点 λ_0 が存在する。又補助定理1から $\lambda = \lambda_0$ において $v = \pi \cdot (\sum \gamma_p)$ となる。但し $\sum \gamma_p$ は下部阻止域に属する減衰極の γ_p の総和である。これは仮定により $(\sum \gamma_p) = \nu + \frac{1}{2}$ と表わされる。 $(\nu; \text{整数})$ 従って一般化特性関数 $\phi = H \cdot \cosh w$ は $\lambda = \pm \lambda_0$ に1位の零を有する。 $S(p) \cdot S(-p) = 1 + \phi^2(p)$ から求められる実現可能な動作伝達係数 $S(p)$ は負実根を2個有する。(証明終り)

尚第3章第3.1節において述べる様に定理4から定まる帯域濾波器の次数を N (偶数) とすれば $(N-2)/2$ 個の線翰を使用して実現出来るのである。

[定理 5]

帯域濾波器の理想伝送量関数 $w(p)$ が p 平面の原点或は無限遠点に於て $2\gamma = \text{正奇数}$ である如き減衰極を有し、 p の実軸上 $\pm g_\alpha$ に於て $\gamma = -\frac{1}{2}$ なる減衰極を有するとき、この帯域濾波器の特性関数 $\psi(p)$ は実軸上に1位の極 g_α をもつ外、 g_α の近傍の一点 p_α に2位の零点をもたせる事が出来る。この p_α は近似的に次式で表わされる。

$$p_\alpha^2 = \begin{cases} g_\alpha^2 - \frac{k'^2 + g_\alpha^2}{\frac{1-k'^2}{1+g_\alpha^2} \cdot d + 1} & \dots\dots\dots (2\gamma)_{p=0} = \text{正奇数の場合} \\ g_\alpha^2 + \frac{k'^2 + g_\alpha^2}{\frac{1-k'^2}{1+g_\alpha^2} \cdot d - 1} & \dots\dots\dots (2\gamma)_{p=\infty} = \text{正奇数の場合} \end{cases}$$

(2.2.37)

但し

$$a = \left(10^{\frac{A_e}{10}} - 1\right) \cdot \left(10^{\frac{A'}{10}} - 1\right) \simeq 10^{\frac{A_e + A'}{10}}$$

ここにおいて A_e は通過域に於ける最小不整合減衰量であり A' は $\pm g_\alpha$ に存在する $\gamma = \frac{-1}{2}$ なる極を除いた時の $p = g_\alpha$ における減衰量 (db) である。

(証明)

実現面 p 面における理想伝送量関数 $w(p)$ を考察しよう。 $w(p)$ は 2.2.1 における式 (2.2.2) の変換によって次の様に表わされる。

$$w(p) = -\sinh^{-1} \sqrt{\frac{1+g_\alpha^2}{1-k^2}} \cdot \sqrt{\frac{k'^2+p^2}{g_\alpha^2-p^2}} + w_2(p) \quad (2.2.38)$$

但し第1項は極 g_α を含む項、第2項は他の全ての極を含む項である。補助定理1から p の実軸上において $\nu = (2\nu+1)\frac{\pi}{2}$ となる領域は p の原点において $2\gamma = \text{奇数}$ となる場合には $[\pm g_\alpha, 0]$ であり、 p の無限遠点で $2\gamma = \text{奇数}$ となる場合には $[\pm g_\alpha, \infty]$ である。従って p の実軸上の $\phi(p) = 0$ の点はこの領域内で $\text{Re } w = 0$ の方程式を解けばよい。即ち次の方程式を解くことに帰着する。

$p = 0$ に於て $2\gamma = \text{奇数}$ の場合

$$u_2(p) = \sinh^{-1} \sqrt{\frac{1+g_\alpha^2}{1-k^2}} \cdot \sqrt{\frac{k'^2+p^2}{g_\alpha^2-p^2}} \quad (2.2.38')$$

$g_\alpha > |p| > 0$

$p = \infty$ に於て $2\gamma = \text{奇数}$ の場合

$$u_2(p) = \cosh^{-1} \sqrt{\frac{1+g_\alpha^2}{1-k^2}} \cdot \sqrt{\frac{k'^2+p^2}{g_\alpha^2-p^2}} \quad (2.2.39')$$

$g_\alpha < |p|$

一方 $w_2(p)$ を理想伝送量関数とする帯域滤波器の動作減衰量を $A'(p)$ とすれば、 $A'(p)$ は

$$A'(p) = 10 \log_{10} \left\{ 1 + \frac{|\cosh w_2(p)|^2}{10^{\frac{A_{e/10}}{10}} - 1} \right\} \quad (2.2.40)$$

と表わされる。式(2.2.38), 式(2.2.39), 及び式(2.2.40)より p_α は次式で表わされる。

$$p_\alpha^2 = g_\alpha^2 \mp \frac{k'^2 + g_\alpha^2}{\frac{1-k^2}{1+g_\alpha^2} \cdot a \pm 1} \quad (2.2.41)$$

但し $a = (10^{\frac{A_c}{10}} - 1)(10^{\frac{A'_{p_\alpha}}{10}} - 1)$ であるが $A'(p)$ は p の実軸で高い減衰量を保持し, p_α の近傍で略一定とみなし得るから $A'(p_\alpha) \simeq A'(g_\alpha)$ が高い近似度で成立する。従って式(2.2.37)が成立する。(証明終り)

さて、定理5によって p の実軸上に1位の極 $-g_\alpha$ を有し式(2.2.37)で定まる2位の零点 $-p_\alpha$ をもつ帯域濾波器の特性関数を $\varphi_1(p)$ とすれば

$$\varphi_1(p) = \frac{(p + p_\alpha)^2}{p + g_\alpha} \cdot \varphi_0(p) \quad (2.2.42)$$

と表わされる。そこで $\varphi_0(p)$ は p^2 の実有理関数である。次に $\varphi_1(p)$ から極 $-g_\alpha$ 及び零点 $-p_\alpha$ を除き, 新しい1位の零点 $-p'_\alpha$ を加えた特性関数を $\varphi_2(p)$ と表わす。即ち

$$\varphi_2(p) = (p + p'_\alpha) \cdot \varphi_0(p) \quad (2.2.43)$$

と定める。 $\varphi_1(p)$ は通過域 $(\pm j k', \pm j)$ に於て完全なラエビシエフ特性を示すが $\varphi_2(p)$ は若干の誤差を有する。 p 面の虚軸上における減衰量の差を求めれば次式で表わされる。

$$\begin{aligned} E(\omega) &= 20 \log_{10} |\varphi_2(j\omega)| - 20 \log_{10} |\varphi_1(j\omega)| \\ &= 20 \log_{10} \left\{ \frac{(\omega^2 + g_\alpha^2)(\omega^2 + p_\alpha'^2)}{(\omega^2 + p_\alpha^2)^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

$E(\omega)$ は p'_α を適当に選べばあらゆる ω に対して極めて小さい値をとる。1例として $p'_\alpha = p_\alpha$ 或は $p'_\alpha \cdot g_\alpha = p_\alpha^2$ とした時の $E(\omega)$ の行状を第2.6図に示す。

(場合1) $p'_\alpha = p_\alpha$ と選ぶ場合;

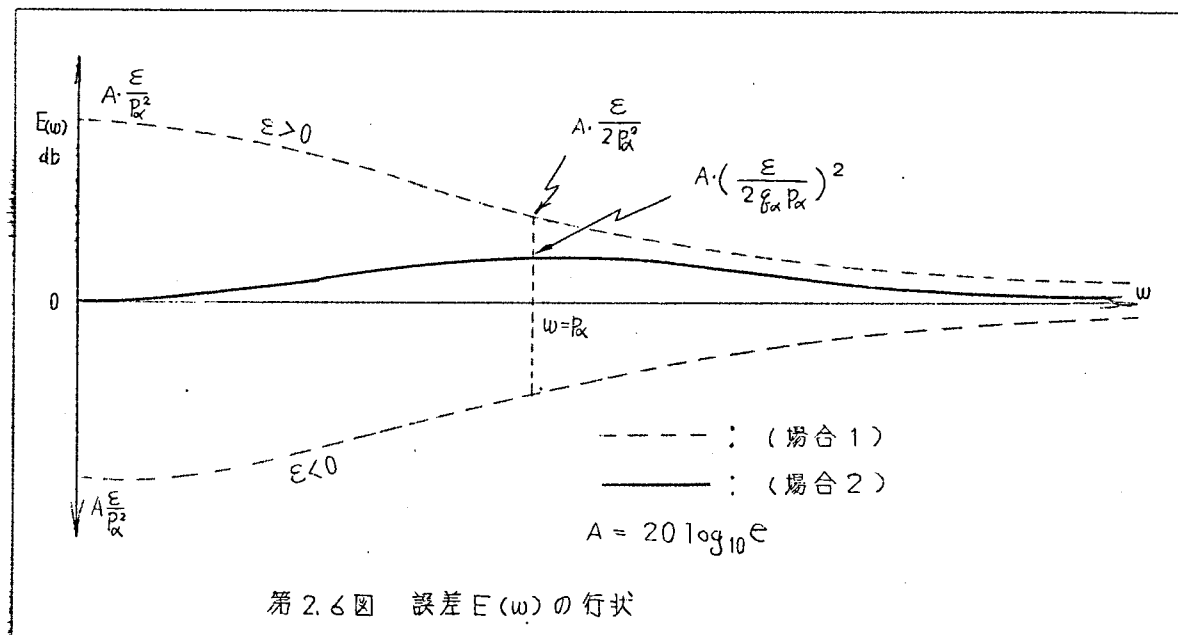
$$\begin{cases} E(0) \cong (20 \log_{10} e) \cdot \left\{ \frac{E}{p_\alpha^2} \right\} \\ E(\omega) \cong (20 \log_{10} e) \cdot \left\{ \frac{E}{p_\alpha^2 + \omega^2} \right\} \quad (\text{単調減少関数}) \\ E(\infty) = 0 \end{cases}$$

〔場合2〕 $p'_\alpha \cdot q_\alpha = p_\alpha^2$ と選ぶ場合 ;

$$\begin{cases} E(0) = E(\infty) = 0 \\ E(\omega) \cong (20 \log_{10} e) \cdot \left\{ \frac{\varepsilon^2 \cdot \omega^2}{q_\alpha^2 (\omega^2 + p_\alpha^2)^2} \right\} \\ E_{\max} = E(p_\alpha) \cong (20 \log_{10} e) \frac{\varepsilon^2}{4 q_\alpha^2 p_\alpha^2} \end{cases}$$

但し

$$\varepsilon = \pm \frac{k'^2 + q_\alpha^2}{\frac{1-k'^2}{1+q_\alpha^2} \cdot a \pm 1} \quad \begin{cases} +; 2\gamma_0 = \text{正奇数の場合} \\ -; 2\gamma_\infty = \text{正奇数の場合} \end{cases}$$



ε は q_α^2 と p_α^2 の差を表わすものであって定理 5 によって

$$\varepsilon \cong \pm \frac{(k'^2 + q_\alpha^2)(1 + q_\alpha^2)}{(1 - k'^2)} \cdot 10^{-\frac{A' + A\varepsilon}{10}} \quad (2.2.45)$$

と表わされる。従って $E(\omega)$ の最大値は次の様に表わすことが出来る。

〔場合 1〕

$$\omega = 0 ; E = E_{\max} \cong \pm 3.686 \frac{(g_{\alpha}^2 + k^2)(1 + g_{\alpha}^2)}{p_{\alpha}^2 (1 - k^2)} \cdot 10^{-\frac{A' + A_e}{10}}$$

〔場合 2〕

$$\omega = p_{\alpha} ; E = E_{\max} \cong 3.686 \frac{(g_{\alpha}^2 + k^2)^2 (1 + g_{\alpha}^2)^2}{4 g_{\alpha}^2 p_{\alpha}^2 (1 - k^2)^2} \cdot 10^{-\frac{2(A' + A_e)}{10}} \quad (2.2.46)$$

E_{\max} は通常極めて小なる値となる。その例として通常の設計例に最も多く用いられる数値例

$$k^2 = 0.6, \quad g_{\alpha}^2 = 1.0, \quad A_e = 20 \text{ db}, \quad A' = 40 \text{ db}$$

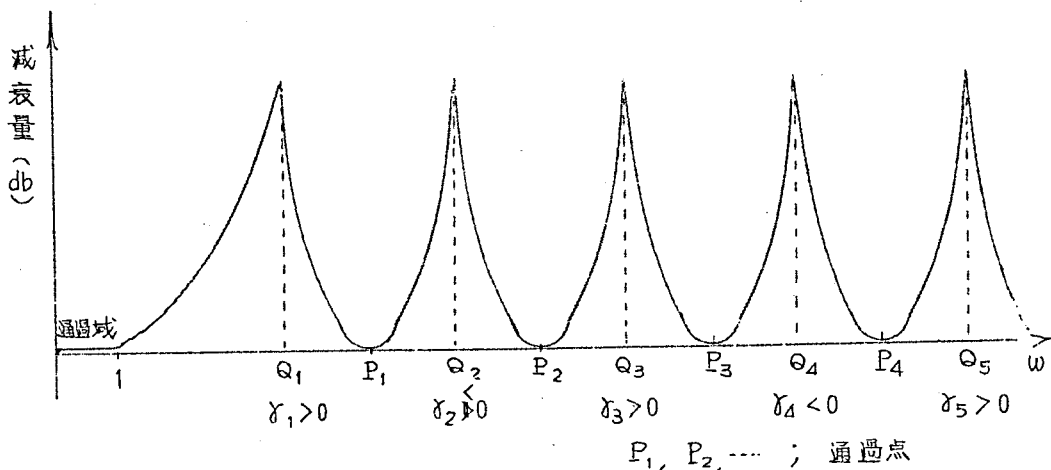
を採用しよう。 g_{α}^2 は 0.5 ~ 3 程度、 A_e は 15 ~ 25 程度であるが A' は 60 或いはそれ以上にも達する事もある。このとき E_{\max} は

$$E_{\max} = \begin{cases} 6.888 \times 10^{-5} \text{ db} & \text{..... (場合 1)} \\ 1.390 \times 10^{-10} \text{ db} & \text{..... (場合 2)} \end{cases}$$

となる。即ち $\varphi_2(p)$ のチエビシエフ特性からの誤差は 10^{-10} db 以下であり、実用上極めて十分な等偏差特性を有するものと言えよう。 A' が大なる程 E_{\max} は小となるが実用上 $A' + A_e > 20$ ならば十分であろう。搬送装置等に用いられる殆んどの濾波器は $A_e = 20$ 程度に選ばれているから、 A' が小なる場合にも良好な等偏差特性が得られる。 $\varphi_2(p)$ は式 (2.2.43) から明らかな如く奇数次であり、これによって奇数次の帯域濾波器が初等的演算によって実現出来る。本方法によらず奇数次の帯域濾波器を得るためには、実軸上に小通過領域を設定した近似問題を解かねばならず、初等計算のみでは原理的に不可能であったものである。

その外の γ, Q の選び方による興味ある例として Comb-Filter の構成について述べておく。第 2.4 図の如く乙平面上に配列された極において γ_p を順次互に異符号ならしめると、各極の間に必ず $\text{Re } w = 0$ の点が存在する。即ちこの点是通过域となる。 γ_p をいくつかの組に分け、それぞれの組を順次互に異符号とすれば、その組分けの間に $\text{Re } w = 0$ の点が存在し通過域となる。かかる $w(\lambda)$ から今まで述べて来た方法により低域、帯域等の濾波器を構成すれば Comb-Filter

の1種が得られる。その模様を第2.7図に示す。



第2.7図 異符号の γ によるComb-Filterの行状

又既に述べた様に $\sum \gamma_p = 0$ とすれば通過域に於て減衰零点は存在せず、又通過域に於ける不整合減衰量 $A_e(\omega)$ は

$$A_e(\omega) = A_{e0} + B(\omega) \text{ db} \quad (2.2.47)$$

$$\text{但し} \quad B(\omega) \cong 20 \log_{10} \frac{1}{\cos \psi(\omega)} \quad \psi = (\omega \text{ の虚部})$$

と表わされる。 $B(\omega)$ は通過域の両端で零であり、通過帯域の内部に於て小さい値をとる。従って A_e は通過域で殆んど平坦特性を示す。かかる回路網はインピーダンス整合回路等に重要な用途が見出されよう。

その他種々な回路の特性を得る事が出来るが、これらは理想伝送量関数を考察することによって始めて達せられるものであり、この事は理想伝送量関数の概念は濾波器設計に広い視野を与える事を立証するものである。

2.26 設 計 例

(例1) 回路次数13次の帯域通過濾波器^{*}(最小線輪回路構成コイル6個)

本例は定理5に基き p 平面の原点に1位即ち $\gamma_0 = \frac{1}{2}$ とし、且 $p = \pm 2.0$

^{*} 回路次数については 第3章第3.1節に詳しく述べる。

に於て $\gamma = -\frac{1}{2}$ ならしめて得られた回路次数 13 次の奇数次帯域濾波器である。さて上の注意の上与えられた阻止域特性を近似する様に式(2.2.15)から各パラメーターの値を定める。本例では次の値を得た。

	m	g	Q^2
$-\alpha$	1.039363312	j 2.000000000	12.45700868
0	1.26143791	0	1.691401722
-3	1.688143631	0.653906405	0.540590532
-2	2.205807311	0.729611277	0.258692997
-1	2.717299683	0.755147163	0.156648534
1	0.482953304	1.055000000	1.304195678
2	0.600917391	1.100000000	1.565194362

帯域係数 $k' = 0.792746113$

基準面における一般化特性関数は次の順序で求められる。先づ(2.2.8)¹⁹より $h^*(\lambda)$ が次の様に求まる。

$$\begin{aligned}
 h^*(\lambda) &= \text{Ra}[(m_{-3}\lambda - \sqrt{1+\lambda^2})(m_0\lambda + \sqrt{1+\lambda^2})(\lambda + \sqrt{1+\lambda})^2 \prod_{\nu=1}^3 (m_{-\nu}\lambda + \sqrt{1+\lambda^2})^2 \prod_{\nu=1}^2 (m_{\nu}\lambda + \sqrt{1+\lambda^2})^2] \\
 &= \lambda^{14} \times 1.029755244468 \times 10^3 \\
 &\quad + \lambda^{12} \times 1.0018656305902 \times 10^4 \\
 &\quad - \lambda^{10} \times 3.2218272055721 \times 10^4 \\
 &\quad + \lambda^8 \times 3.3358399367598 \times 10^4 \\
 &\quad - \lambda^6 \times 1.4647207385013 \times 10^4 \\
 &\quad + \lambda^4 \times 2.613041974055 \times 10^3 \\
 &\quad - \lambda^2 \times 1.44067630414 \\
 &\quad + 1.0 \\
 &= k_0^* (\lambda^2 - 12.457008295957931948) \\
 &\quad \times (\lambda^{12} - 2.727845604411831054\lambda^{10} + 2.693484840713425182\lambda^8 \\
 &\quad - 1.158269705765696165\lambda^6 + 2.046056440314576088 \times 10^{-1}\lambda^4 \\
 &\quad - 1.123726372330164898 \times 10^{-2}\lambda^2 + 7.795648246181195810 \times 10^{-5}) \\
 &\quad \text{但し } k_0^* \text{ は最高次の係数}
 \end{aligned}$$

$$h^*(\lambda) = (\lambda^2 - \alpha^2) P(\lambda^2)$$

従って一般化特性関数は次の如くなる。

$$\phi(\lambda) = \frac{(\lambda^2 - \alpha^2) \cdot P(\lambda^2)}{\sqrt{\lambda^2 - Q_{-\alpha}^2} \cdot \prod (\lambda^2 + Q_y^2)}$$

$$\text{但し } \begin{cases} \alpha^2 = 12.457008295957931948 \\ Q_{-\alpha}^2 = 12.457008680000000000 \end{cases}$$

今 $\alpha' = \alpha^2 / Q_{-\alpha}$ と定めると 通過域でのチエビシエフ特性からの誤差は $E_{\max} = 2.06343 \times 10^{-15} \text{ db}$ となる。

さて基本方程式を求めると次の様になる。

$$(\lambda^2 - \alpha^2) \{ P(\lambda^2) \}^2 + H^{-2} (\lambda^2 - Q_{-3}^2)^2 (\lambda^2 - Q_{-2}^2)^2 (\lambda^2 - Q_{-1}^2)^2 (\lambda^2 - Q_0^2) (\lambda^2 + Q_1^2)^2 (\lambda^2 + Q_2^2)^2 = G(x)_{x=-\lambda^2}$$

上式は $(-\lambda^2)$ の 13 次式であって 13 次の代数方程式を解けば 1 個の実根と 6 対の複素根を得る。

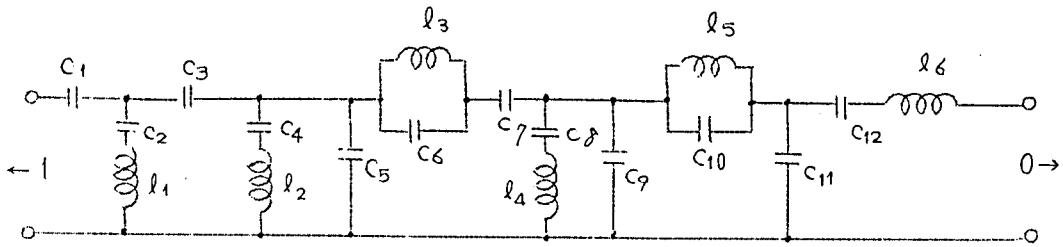
(基本方程式の因数分解)

$$G(x) = (x + q_0) \prod_{\mu=1}^6 (x^2 + P_{\mu}x + q_{\mu})$$

P_{μ}	q_{μ}
	12.45 6967 5669 0770
0.023 3775 8859 2640 05	6.872 0433 9435 9318 $\times 10^{-4}$
-0.097 2984 6347 1398 8	0.010 0273 2547 1111 78
-0.440 2305 6892 2401 5	0.085 0540 3738 7927 23
-1.117 7147 5053 0211	0.381 1916 8037 5832 4
-1.775 2442 7861 4303	0.817 9525 1408 7982 7
-2.048 5396 2482 465	1.051 6432 9945 9937

この P_{μ} , q_{μ} から p 平面における $g(p)$ を求めるのには第 2.2 表の変換 4 によって計算すればよい。以上の計算によって $g(p)$ を求めた後 電圧減衰波器として構成したのが第 2.8 図 (a), (b) である。回路構成は第 3 章の最小線輪回路構成として実現され線輪 6 個にもかかわらず最良の特性が得られている。

(基準回路の素子値)



C_1 : 5.335 6609 33

C_2 : 0.285 3472 33

C_3 : 1.292 2912 53

C_4 : 0.462 5912 14

C_5 : 0.173 2244 1

C_6 : 3.410 6721 58

C_7 : 0.832 8362 93

C_8 : 3.398 9106 41

C_9 : 3.598 6017 29

C_{10} : 1.126 5155 52

C_{11} : 0.471 0608 66

C_{12} : 0.037 1514 5406

l_1 : 4.803 2456 33

l_2 : 3.790 8747 03

l_3 : 0.263 4238 57

l_{34} : 0.688 0643 71

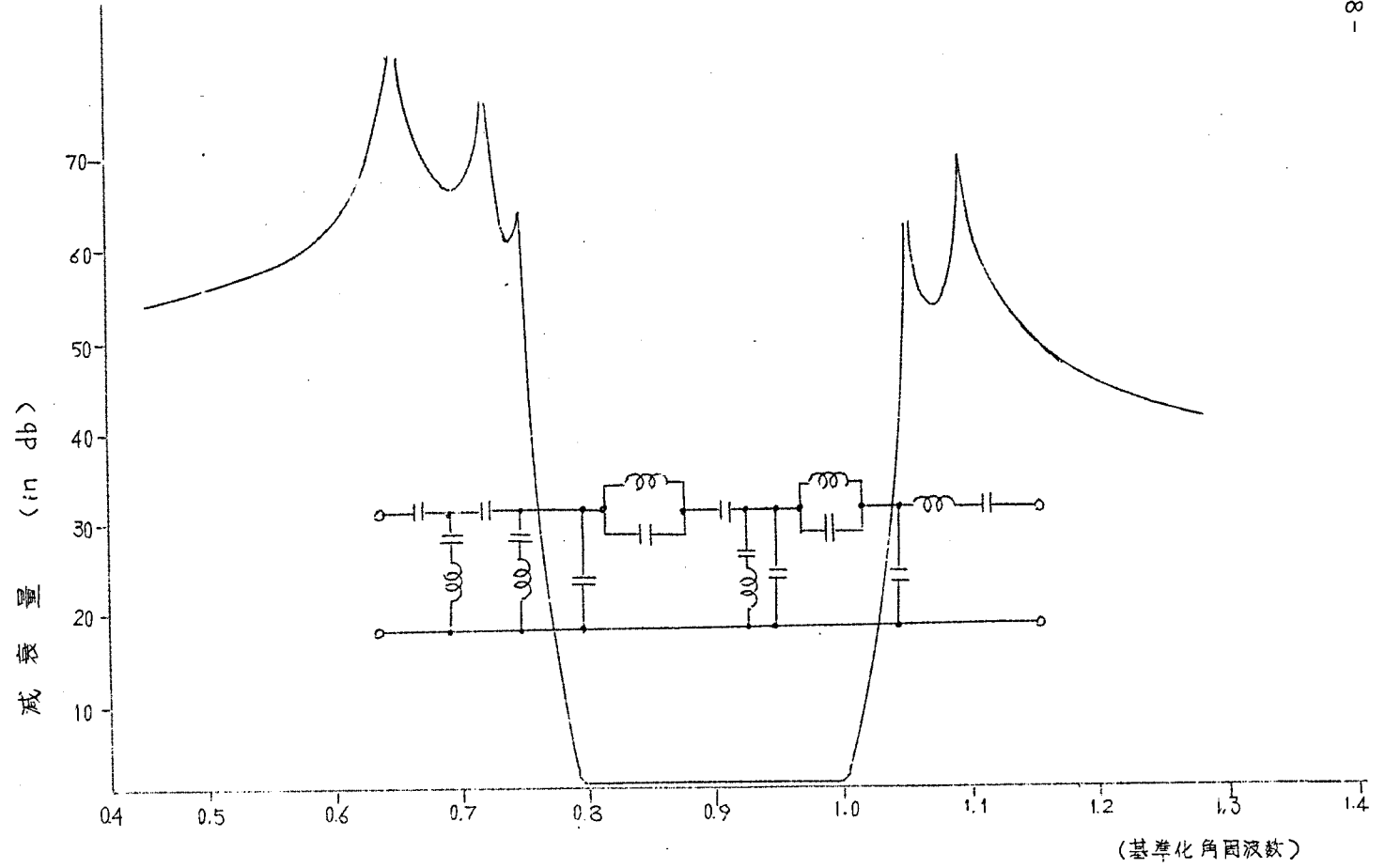
l_{45} : 0.733 6306

l_{56} : 34.29 0684 57

第 2. 図 (a)

設計例 I の基準回路及びその素子値

(素子値は規準化された値を示す)



第2.8図(b)13次のギ域波器の実現回路と伝達特性

(例2) 回路次数10次帯域通過濾波器(最小線輪数回路コイル4個)

本例は定理4に基いて設計されたもので、実現面に於て下部阻止域に属する減衰極のパラメーター m を負としている。即ち各パラメーターを次の如く定めた。

$$\begin{aligned} k' &= 0.080 \ 6916 \ 42 & A_e &= 20 \\ m_0 &= 12.39 \ 2857 \ 24 & Q_0^2 &= 0.655 \ 3813 \ 8986 \ 7081 \ 740 \times 10^{-2} \\ m_{-1} &= 13.70 \ 8175 \ 41 & Q_{-1}^2 &= 0.535 \ 0051 \ 9440 \ 2022 \ 325 \times 10^{-2} \\ m_1 &= 0.434 \ 3483 \ 77 & Q_1^2 &= 1.232 \ 5266 \ 4326 \ 0524 \ 806 \\ m_2 &= 0.498 \ 6603 \ 99 & Q_2^2 &= 1.330 \ 9592 \ 4548 \ 1607 \ 106 \end{aligned}$$

この数値によって 基準面における $h^*(\lambda)$ は次の様に計算される。

$$\begin{aligned} h^*(\lambda) &= Ra(m_0\lambda - \sqrt{1+\lambda^2})^3(m_{-1}\lambda - \sqrt{1+\lambda^2})^2(m_1\lambda + \sqrt{1+\lambda^2})^2(m_2\lambda + \sqrt{1+\lambda^2})^2(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}) \\ &= \lambda^{10} ; 1.0 \\ &\quad \lambda^8 ; 1.394 \ 6243 \ 0692 \ 5481 \ 1166 \\ &\quad \lambda^6 ; 3.312 \ 4150 \ 9273 \ 4030 \ 042 \times 10^{-1} \\ &\quad \lambda^4 ; -7.993 \ 7789 \ 6698 \ 0079 \ 725 \times 10^{-2} \\ &\quad \lambda^2 ; -1.351 \ 1339 \ 9687 \ 1275 \ 587 \times 10^{-3} \\ &\quad \lambda^0 ; -9.061 \ 9127 \ 5262 \ 5900 \ 062 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

$h^*(\lambda)$ と $f(\lambda)$ とにより基本方程式(2.2.18)を作る。 $\lambda^2 = -x$ とおいて基本方程式の因数分解を示せば次の通りである。

$$\begin{aligned} G(x) &= [h^*(\lambda) h^*(-\lambda)]_{\lambda^2=-x} + H^{-2} h^{*-2}(f(\lambda))_{\lambda^2=-x}^2 \\ &= (x^2 + 3.527 \ 6900 \ 8175 \ 9664 \times 10^{-3} x + 5.694 \ 8873 \ 5051 \ 317 \times 10^{-6}) \\ &\quad \times (x^2 + 8.925 \ 2625 \ 6467 \ 7209 \times 10^{-3} x + 7.799 \ 5077 \ 8161 \ 1268 \times 10^{-5}) \\ &\quad \times (x^2 - 2.285 \ 1719 \ 9640 \ 0970 \cdot x + 1.553 \ 1701 \ 4815 \ 7936) \\ &\quad \times (x^2 - 2.160 \ 9089 \ 2920 \ 857 \cdot x + 1.173 \ 5029 \ 0003 \ 179) \\ &\quad \times (x + 4.965 \ 6552 \ 9307 \ 1141 \ 8805)(x + 0.018 \ 2057 \ 1119 \ 9798 \ 1195) \end{aligned}$$

従って式(2.2.21)に従って p 平面における Hurwitz 多項式 $g(p)$ を求める事が出来る。

(定理4)に従って $g(p)$ は2個の負実根を有しているのである。

$$g(p) = (p + 2.219\ 6423\ 2924\ 3985\ 931)(p + 0.107\ 5919\ 6139\ 5360\ 504) \\
(p^2 + 0.022\ 8385\ 8457\ 4540\ 691 \cdot p + 0.005\ 0195\ 8116\ 4380\ 2514) \\
(p^2 + 0.107\ 4588\ 4321\ 2989\ 046 \cdot p + 0.007\ 8512\ 6812\ 0560\ 3977) \\
(p^2 + 0.450\ 4979\ 1886\ 0390\ 806 \cdot p + 1.244\ 1252\ 7695\ 6617\ 741) \\
(p^2 + 0.074\ 7476\ 1772\ 7067\ 864 \cdot p + 1.082\ 7242\ 1741\ 1970\ 142)$$

$$h(p) = (p^8 + 1.565\ 7129\ 9850\ 1765\ 560 \cdot p^6 + 5.945\ 7236\ 7497\ 2681\ 347 \times 10^{-1} \cdot p^4 \\
+ 1.612\ 1978\ 8753\ 2454\ 428 \times 10^{-2} \cdot p^2 + 8.588\ 6668\ 9149\ 7799\ 91963) \\
\times (p^2 - 0.147\ 6135\ 8176\ 10647)$$

或は

$$\times (p \pm 0.384\ 2051\ 2979\ 5353\ 852)^2$$

$h(p)$ は $h^*(\lambda)$ から変換されて求められるが、 p の実根を有しているのて上に示す様に $(p^2 - \alpha^2)$ 或は $(p + \alpha)^2$ 又は $(p - \alpha)^2$ のいずれの因子を採用してもよい。しかし最小線輪数回路網構成とするために $(p^2 - \alpha^2)$ の因子を採用する。(第3章第3.1節(定理2)の(系)参照)

そのとき $h(p)$ は次の様になる。

$$h(p) = p^{10} ; 1.0 \\
p^8 : 1.418\ 0994\ 1674\ 0700\ 860 \\
p^6 : 3.634\ 5186\ 3778\ 5659\ 921 \times 10^{-1} \\
p^4 : -7.164\ 4977\ 9071\ 0325\ 329 \times 10^{-2} \\
p^2 : -2.293\ 9363\ 7794\ 7899\ 555 \times 10^{-3} \\
p^0 : -1.267\ 8038\ 8240\ 6813\ 1579 \times 10^{-5}$$

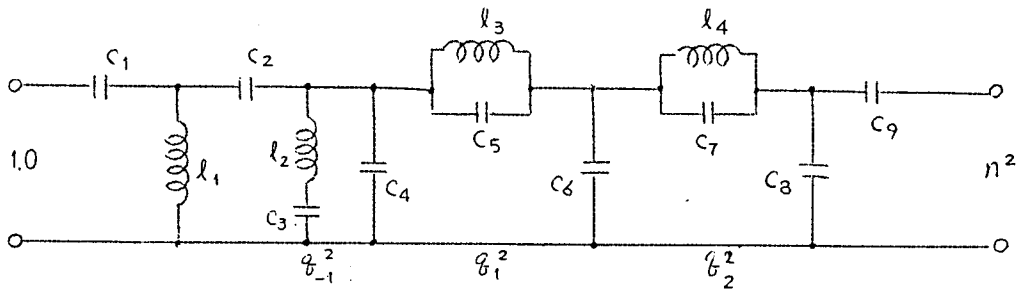
尚参考までに $h(p)$ の零点(反響減衰極)を求めると次の様になっている。即ち1対の実根の外は通過帯域にあり、通過域チエビシエフ近似に貢献しているのである。

$$\pm 0.384202512979 \\
j\ 0.984624009 \\
j\ 0.753229278 \\
j\ 0.147200162 \\
j\ 0.0848900819$$

一方 $f(p)$ の方は次の様に求まる。

$$f(p) = (p^2 + 1.195\ 9240\ 8767 \times 10^{-3}) \\ \times (p^2 + 1.231\ 0126\ 2947\ 94) \\ \times (p^2 + 1.328\ 8043\ 2313\ 9681)$$

$g(p)$, $h(p)$ 及び $f(p)$ が全部求まったから第3章の構成方法に従って最小線輪数回路構成として決める回路素子を得る。又その伝送特性を第2.10図に示す。
第2.9図の



$$g_{-1}^2 = 1.195\ 9240\ 8767 \times 10^{-3}$$

$$g_1^2 = 1.231\ 0126\ 2947\ 94$$

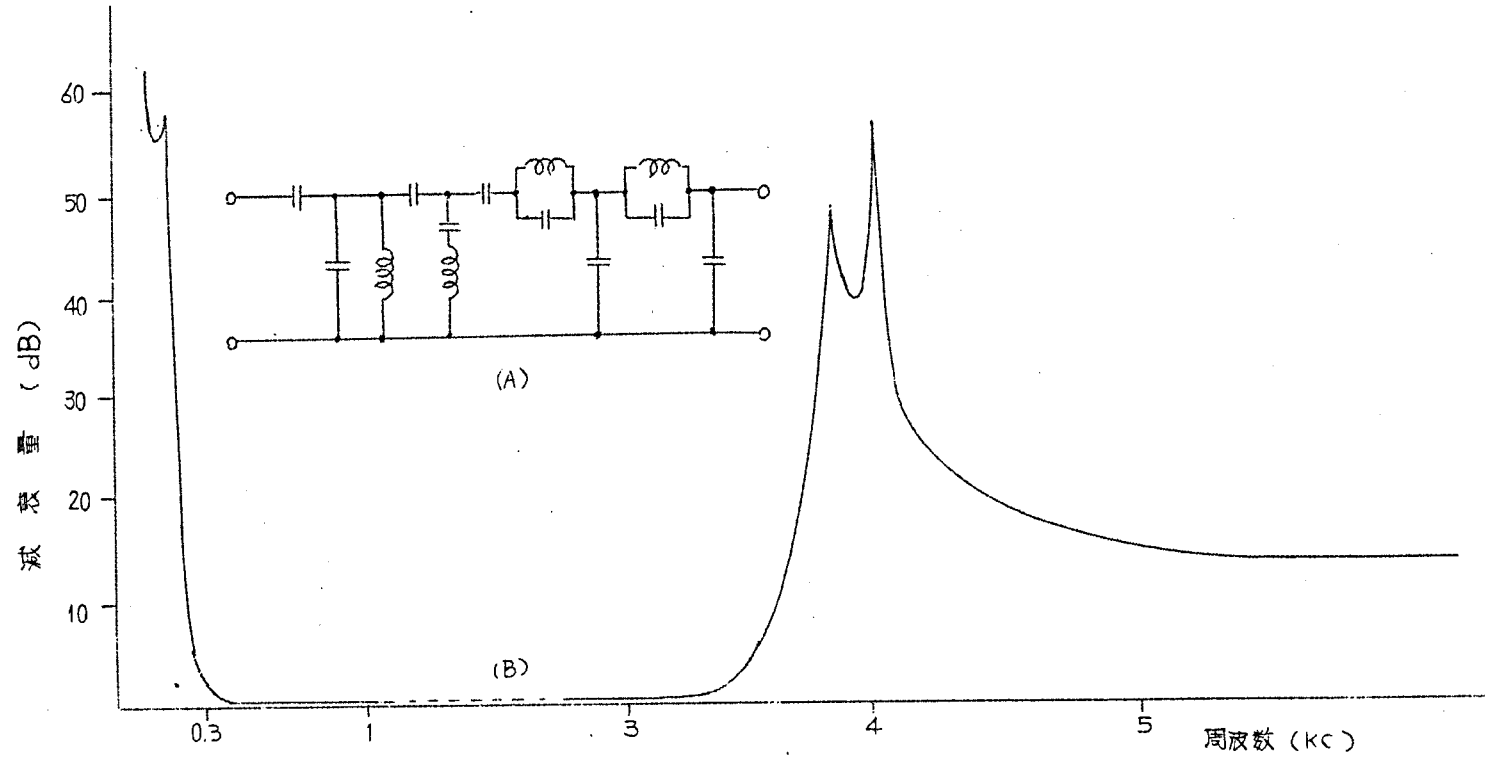
$$g_2^2 = 1.328\ 8043\ 2313\ 968$$

$$n^2 = 1.020\ 2823\ 1590\ 8697\ 304$$

素子値 (規準化)

C_1	14.20 6373 314	l_1	8.442 5173 93
C_2	3.053 7274 46		
C_3	87.60 5153 36		
C_4	0.052 4382 37	l_2	9.544 7978 02
C_5	2.618 3062 08		
C_6	0.949 9622 60	l_3	0.310 2537 62
C_7	1.799 1974 25		
C_8	0.041 5357 27	l_4	0.418 2733 02
C_9	16.26 6077 6		

第2.9図 設計例Ⅱの基準回路と素子値



第 2.10 図 10 次の帯域濾波器の実現回路と伝送特性

2.2.7 第2.2節の結論

本節に於ては前節に於て述べた一般論の重要な例として通過域が1個ある濾波器の設計理論の全てについて記述した。先ず通過域が1個ある場合の理想伝送型関数 $W(\lambda)$ 及び一般化特性関数の標準形を求め、この標準形から s^2 の一次変換で得られるものの代表例を3つにわけて述べた。低域濾波器の場合はDarlingtonの理論と一致する。帯域通過濾波器の設計理論はその出現が望まれていたもので実用上も極めて意義が大きい。又帯域阻止濾波器は従来全く知られていなかったものである。この実現のためには未だ問題があるが梯子形回路でなくアドミッタンス行列を分解して並列梯子形にする事によって多くの場合実現出来る。帯域濾波器の製作困難が痛感されている現在、有望な設計法となって来た。2.2.5 に於て述べている様に留数、パラメーターを種々に選ぶ事により実用価値の多い新規な濾波器が得られる事はこの理論の勝利と言えよう。負値の σ の効用は未だいろいろ考えられるもので、リアクタンス濾波器のみならず一般のRLC回路を用いる濾波器、活性素子を含む濾波器の特性の近似にも応用出来る事を注意しておく。

又本節においては減衰極は全て虚数或は実数のみであったが、勿論任意の複素数であっても理論は全く同様に論ぜられる。その場合は位相特性の改善されたチエビシエフ減衰特性濾波器の設計、有限のQを有するコイルを用いた濾波器（正確な損失補償）の設計が可能となるのである。この様に非常に適用範囲が広いのもこの理論の意義深いところである。

第2.3節 通過域を2個有する通過域チェビシェフ 特性濾波器の設計理論 (50) (56)

2.3.1 複通過域濾波器の理想伝送量関数と一般化特性関数

前節においては通過域を1個有する濾波器の場合について詳細に検討したが、本節では通過域を2個有する濾波器の構成について考察しよう。

複通過濾波器の基準面における理想伝送量関数の標準形を次の如く定める。

- 1) 通過域を $[-jk_1, +jk_1]$ 及び $[\pm j, \infty]$ とする。
- 2) 入面の有限領域に有限個の減衰極をおく。

前節と同様に簡単のため減衰極は純虚数或は純実数としよう。第1章の基礎理論からアベル微分 $\psi(\lambda) \cdot d\lambda$ は次式で与えられる。

$$\psi(\lambda) d\lambda = \left\{ d_\infty + \sum_{\nu=1}^m \frac{d_\nu}{\lambda^2 + Q_\nu^2} \right\} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 + k_1^2)(\lambda^2 + 1)}} \quad (2.3.1)$$

但し Q_ν は $2m$ 個の実又は虚の減衰極である。求める理想伝送量関数 $w(\lambda)$ は

$$w(\lambda) = \int_0^\lambda \left\{ d_\infty + \sum_{\nu=1}^m \frac{d_\nu}{\lambda^2 + Q_\nu^2} \right\} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 + k_1^2)(\lambda^2 + 1)}} \quad (2.3.2)$$

と表わされる。 $w(\lambda)$ は一般には第三種楕円積分で第1章の基礎理論に基づいて特性関数を求めることが出来るわけであるが、その計算にあたっては式(2.1.19)に相当する超越方程式を解かねばならない。本節に於ては超越方程式を解く事なく代数演算のみにより複通過域濾波器の特性関数を得るための必要且充分条件を求め、その計算法を述べる。

対数特異点を有する理想伝送量関数 w から式(2.1.11)により一般化特性関数(一般に代数関数)を代数演算のみによって求める事が出来るためには $w(\lambda)$ が任意の代数関数の逆円関数(逆双曲線関数を含む)の一次結合で表わされることが必要且充分である。第2章にならって $w(\lambda)$ の微分の極に関する留数をとるとき、 $w(\lambda)$ が次式で表わされることが必要且充分条件となるのである。

$$W(\lambda) = \sum_{\mu=1}^N \gamma_{\mu} \cdot w_{\mu}(\lambda) \quad (2.3.3)$$

但し $w_{\mu}(\lambda) = \alpha \cdot \sinh^{-1} X_{\mu}(\lambda)$, $X_{\mu}(\lambda)$; 代数関数, α ; 定数 (2.3.3)'

$w_{\mu}(\lambda)$ はその微分の留数が 1 に等しく, 代数関数の逆双曲線関数で表わせるもので, これを複通過域濾波器の理想伝送量関数の基本形と名付ける. さて式 (2.3.2) で表わされる $W(\lambda)$ がこの様な基本形となるための必要且充分条件を次の定理に示す.

〔定理 6〕

複通過域の理想伝送量関数

$$W(\lambda) = \int_0^{\lambda} \left\{ d_{\infty} + \sum_{\nu=1}^m \frac{d_{\nu}}{\lambda^2 + Q_{\nu}^2} \right\} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 + R_1^2)(\lambda^2 + 1)}}$$

が基本形で表わされるための必要且充分条件は

- 1) $W(\lambda)$ の微分の極に於ける留数は全て 1 である事.
- 2) 次の条件式を充す多項式 $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ 及び $R(\lambda)$ が存在する事.

$$\text{条件式} \begin{cases} (\lambda^2 + R_1^2)(\lambda^2 + 1) \cdot R^2(\lambda) = A(\lambda) \cdot B(\lambda) & (2.3.4) \\ \prod_{\nu=1}^m (\lambda^2 + Q_{\nu}^2) = A(\lambda) - B(\lambda) & (2.3.5) \end{cases}$$

〔証 明〕

(必要性) $W(\lambda)$ の基本形表示式 (2.3.3)' より

$$W(\lambda) = \alpha \cdot \sinh^{-1} X(\lambda) = \alpha \int_0^{\lambda} \frac{X'(\lambda)}{\sqrt{1 + X^2(\lambda)}} d\lambda \quad (2.3.6)$$

となる. 上式が式 (2.3.2) と等しいためには次式が成立しなければならない.

$$\left\{ d_{\infty} + \sum_{\nu=1}^m \frac{d_{\nu}}{(\lambda^2 + Q_{\nu}^2)} \right\} \frac{1}{\sqrt{(\lambda^2 + R_1^2)(\lambda^2 + 1)}} = \frac{\alpha \cdot X'(\lambda)}{\sqrt{1 + X^2(\lambda)}} \quad (2.3.7)$$

従って $X^2(\lambda)$ は有理関数でなければならない. 今

$$X^2(\lambda) = \frac{\pi(\lambda)}{D(\lambda)} \quad (2.3.8)$$

とわけば, $\chi(\lambda)$, $D(\lambda)$ は多項式であって (2.3.7) は次の様に変形される。

$$\left\{ d_{\infty} + \sum_{\nu=1}^m \frac{d_{\nu}}{\lambda^2 + Q_{\nu}^2} \right\} \frac{1}{\sqrt{(\lambda^2 + k_1^2)(\lambda^2 + 1)}} = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{D(\lambda) \cdot \chi'(\lambda) - D'(\lambda) \cdot \chi(\lambda)}{D(\lambda) \sqrt{\chi^2(\lambda) + D(\lambda) \cdot \chi(\lambda)}} \quad (2.3.9)$$

上式に於て極は $\lambda = \pm j Q_{\nu}$ のみに存在するから

$$D(\lambda) = \prod_{\nu=1}^m (\lambda^2 + Q_{\nu}^2) \quad (2.3.10)$$

を得る。又右辺の根号内の関数は $(\lambda^2 + k_1^2)(\lambda^2 + 1)$ を因子としてもたねばならない。即ち次式が存在する事が必要である。

$$\sqrt{\chi^2(\lambda) + \left\{ \prod_{\nu=1}^m (\lambda^2 + Q_{\nu}^2) \right\} \cdot \chi(\lambda)} = R(\lambda) \sqrt{(\lambda^2 + k_1^2)(\lambda^2 + 1)} \quad (2.3.11)$$

但し $R(\lambda)$ は任意の多項式とする。

$\chi(\lambda)$ は λ の多項式でなければならぬが式 (2.3.11) を充す χ が多項式であるためには (2.3.11) を χ に関する二次式とみたときその判別式が完全平方となる事が必要である。従って

$$\left\{ \prod_{\nu=1}^m (\lambda^2 + Q_{\nu}^2) \right\}^2 + 4R^2(\lambda) \cdot (\lambda^2 + k_1^2)(\lambda^2 + 1) = C^2(\lambda) \quad (2.3.12)$$

を充す多項式 $R(\lambda)$, $C(\lambda)$ が存在しなければならない。

必要条件 (2.3.12) は次の様に表現出来る。即ち式 (2.3.7) が成立するためには

$$\begin{cases} (\lambda^2 + k_1^2)(\lambda^2 + 1) \cdot R^2(\lambda) = A(\lambda) \cdot B(\lambda) \\ \prod_{\nu=1}^m (\lambda^2 + Q_{\nu}^2) = A(\lambda) - B(\lambda) \end{cases}$$

を満足する多項式 $R(\lambda)$, $A(\lambda)$ 及び $B(\lambda)$ が存在する事が必要である。尚条件 (1) が必要であることは基本形の定義から当然である。

(十分性) 条件 1) 及び条件 2) が成立したものと仮定する。今式 (2.3.4) 及び式 (2.3.5) より求められる多項式 $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ を用いて関数

$$2 \sinh^{-1} \frac{\sqrt{-A(\lambda)}}{\sqrt{A(\lambda)-B(\lambda)}} \quad (2.3.13)$$

を作る。(2.3.13)を λ について微分すれば

$$\frac{d}{d\lambda} \left\{ 2 \sinh^{-1} \frac{\sqrt{-A(\lambda)}}{\sqrt{A(\lambda)-B(\lambda)}} \right\} = \frac{A'(\lambda) \cdot B(\lambda) - A(\lambda) \cdot B'(\lambda)}{\{A(\lambda)-B(\lambda)\} \sqrt{A(\lambda) \cdot B(\lambda)}} \quad (2.3.14)$$

となる。上式に式(2.3.5)を代入すれば

$$\frac{1}{\prod_{\nu=1}^m (\lambda^2 + Q_\nu^2)} \left(A'(\lambda) \cdot \sqrt{\frac{B(\lambda)}{A(\lambda)}} - B'(\lambda) \sqrt{\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}} \right) \quad (2.3.15)$$

となる。さて上式の $\lambda = \pm j Q_k$ における留数を求めよう。然るに式(2.3.5)により

$$\begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow \pm j Q_k} \left\{ A'(\lambda) \cdot \sqrt{\frac{B(\lambda)}{A(\lambda)}} - B'(\lambda) \cdot \sqrt{\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}} \right\} = \left[\pm j 2 Q_k \cdot \prod'_{\nu \neq k} (Q_\nu^2 - Q_k^2) \right] \\ \lim_{\lambda \rightarrow \pm j Q_k} \left\{ \frac{\prod_{\nu=1}^m (\lambda^2 + Q_\nu^2)}{(\lambda \mp j Q_k)} \right\} = \left[\pm j 2 Q_k \cdot \prod'_{\nu \neq k} (Q_\nu^2 - Q_k^2) \right] \end{cases}$$

となる事から次式を得る。

$$(\text{留数}) = \lim_{\lambda \rightarrow \pm j Q_k} \left\{ \frac{(\lambda \mp j Q_k)}{\prod_{\nu=1}^m (\lambda^2 + Q_\nu^2)} \left(A'(\lambda) \sqrt{\frac{B(\lambda)}{A(\lambda)}} - B'(\lambda) \sqrt{\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}} \right) \right\} = 1 \quad (2.3.16)$$

従って $A(\lambda)$ 及び $B(\lambda)$ が式(2.3.5)を充しているかぎり式(2.3.14)の全ての極における留数は1である。

次に式(2.3.4)から $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ は適当な多項式 $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $r_1(\lambda)$, $r_2(\lambda)$ によって

$$\begin{cases} A(\lambda) = a(\lambda) \cdot r_1^2(\lambda), & B(\lambda) = b(\lambda) \cdot r_2^2(\lambda) \\ a(\lambda) \cdot b(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + k_1^2), & r_1(\lambda) \cdot r_2(\lambda) = R(\lambda) \end{cases}$$

と表わされる。従って式(2.3.14)の分子は

$$A'(\lambda) \cdot B(\lambda) - A(\lambda) \cdot B'(\lambda) = \left[\{ a'(\lambda) \cdot b(\lambda) - a(\lambda) \cdot b'(\lambda) \} R(\lambda) + \{ h_2(\lambda) - h_1(\lambda) \} \cdot 2a(\lambda)b(\lambda) \right] R(\lambda)$$

(2.3.17)

と変形され多項式 $R(\lambda)$ で整除される。この事から式 (2.3.14) は式 (2.3.4) 及び式 (2.3.5) により次式の様に表わされることがわかる。

$$\frac{A'(\lambda) \cdot B(\lambda) - A(\lambda) \cdot B'(\lambda)}{(A(\lambda) - B(\lambda)) \sqrt{A(\lambda) \cdot B(\lambda)}} = \frac{P(\lambda)}{\prod_{\nu=1}^m (\lambda^2 + \alpha_{\nu}^2) \sqrt{(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + k_1^2)}}$$

(2.3.18)

但し $P(\lambda)$ は λ の多項式であって、全ての極における留数が 1 なる事により一意的に定まるものである。上式の分母は式 (2.3.1) の分母に全く等しく、且極における留数が相等しいから式 (2.3.18) は結局式 (2.3.1) に相等しい。
(証明終り)

(系) 定理 6 を允す理想伝送量関数は基本形

$$W(\lambda) = 2 \sinh^{-1} \frac{\sqrt{-A(\lambda)}}{\sqrt{A(\lambda) - B(\lambda)}}$$

で表わされる。

さて式 (2.3.4) 及び式 (2.3.5) を允す多項式 $R(\lambda)$, $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ の求め方を考察しよう。先ず式 (2.3.5) より $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ の一方は $2m$ 次多項式、他方は高々 $(2m-2)$ 次多項式であり、従って式 (2.3.4) から $R(\lambda)$ は高々 $(2m-3)$ 次の奇多項式でなければならぬ。今未定多項式 $R(\lambda)$ を次の如く表わすことにする。

$$R(\lambda) = R \cdot \lambda \prod_{i=1}^{m-2} (\lambda^2 + \alpha_i^2)$$

(2.3.19)

上式を式 (2.3.4) に代入して次式を得る。

$$R^2 \lambda^2 (\lambda^2 + k_1^2) (\lambda^2 + 1) (\lambda^2 + \alpha_1^2) (\lambda^2 + \alpha_2^2)^2 \cdots (\lambda^2 + \alpha_{m-2}^2) = A(\lambda) \cdot B(\lambda)$$

(2.3.20)

この式を因数分解して二つの多項式 $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ を得るには多くの組合せが存在する。それらの因子の組合せのうち式 (2.3.4) が成立可能なもののみを選び、 R , k_1 , α_i^2 によって表わされた多項式 $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ を (2.3.5) に代入して両辺の λ の同次のものの係数を相等しくおくことにより、 R , α_i 及び Q_v に関する m 個の係数方程式の組

$$F_k(R, \alpha_i, Q_v, k_1) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (2.3.21)$$

が得られる。 $m-1$ 個の未定係数 R 及び α_i ($i = 1, 2, \dots, m-2$) に対して m 個の方程式 (2.3.21) が成立するためには、式 (2.3.21) から未定係数を全部消去して得られる 1 個の条件式

$$F(Q_v, k_1) = 0 \quad (2.3.21)$$

が Q_v と k_1 に関して成立せねばならない。さて (2.3.21) の制限条件の下に (2.3.21) から $m-1$ 個の未定係数を定めることが出来る。

$$\left. \begin{aligned} R &= K_0(Q_v, k_1) \\ \alpha_i &= K_i(Q_v, k_1) \quad (i = 1, 2, \dots, m-2) \end{aligned} \right\} \quad (2.3.22)$$

今制限条件 (2.3.21) を複通過回路器の特性条件と名付けるとき、複通過回路器は減衰極 Q_v と帯域係数 k_1 との間に 1 個の特性条件 (2.3.21) が成立するとき初等的演算により設計可能となるのである。このとき帯域係数 k_1 が与えられると減衰極 Q_v のうち 1 個を (2.3.21) によって定めればよい。しかし場合によっては全ての減衰極 Q_v が与えられていて逆に帯域係数 k_1 を式 (2.3.21) によって定めねばならない事もある。

同一の帯域係数 k_1 を有し特性条件 (2.3.21) の下に適当に選ばれた減衰極を有する多くの理想伝送量関数の基本形の 1 次結合により一般的複通過回路器理想伝送量関数が求められる。

$$\left. \begin{aligned} W(\lambda) &= \sum_{\mu=1}^N \gamma_{\mu} \cdot W_{\mu}(\lambda) \\ W_{\mu}(\lambda) &= 2 \sinh^{-1} \sqrt{\frac{-A_{\mu}(\lambda)}{\prod_{\nu=1}^{m_1} (\lambda^2 + Q_{\mu\nu}^2)}} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.23)$$

上式より次式を得る。

$$\exp\{\pm w_{\mu}(\lambda)\} = \frac{\{\sqrt{A_{\mu}(\lambda)} \pm \sqrt{B_{\mu}(\lambda)}\}^2}{\prod_{\nu=1}^m (\lambda^2 + Q_{\mu\nu}^2)} \quad (2.3.24)$$

従って

$$\exp\{\pm w(\lambda)\} = \frac{\prod_{\mu=1}^N \{\sqrt{A_{\mu}(\lambda)} \pm \sqrt{B_{\mu}(\lambda)}\}^{2\delta_{\mu}}}{\prod_{\mu=1}^N \prod_{\nu=1}^m (\lambda^2 + Q_{\mu\nu}^2)^{\delta_{\mu}}} \quad (2.3.25)$$

となる。上式により一般化特性関数は次式で計算出来る。

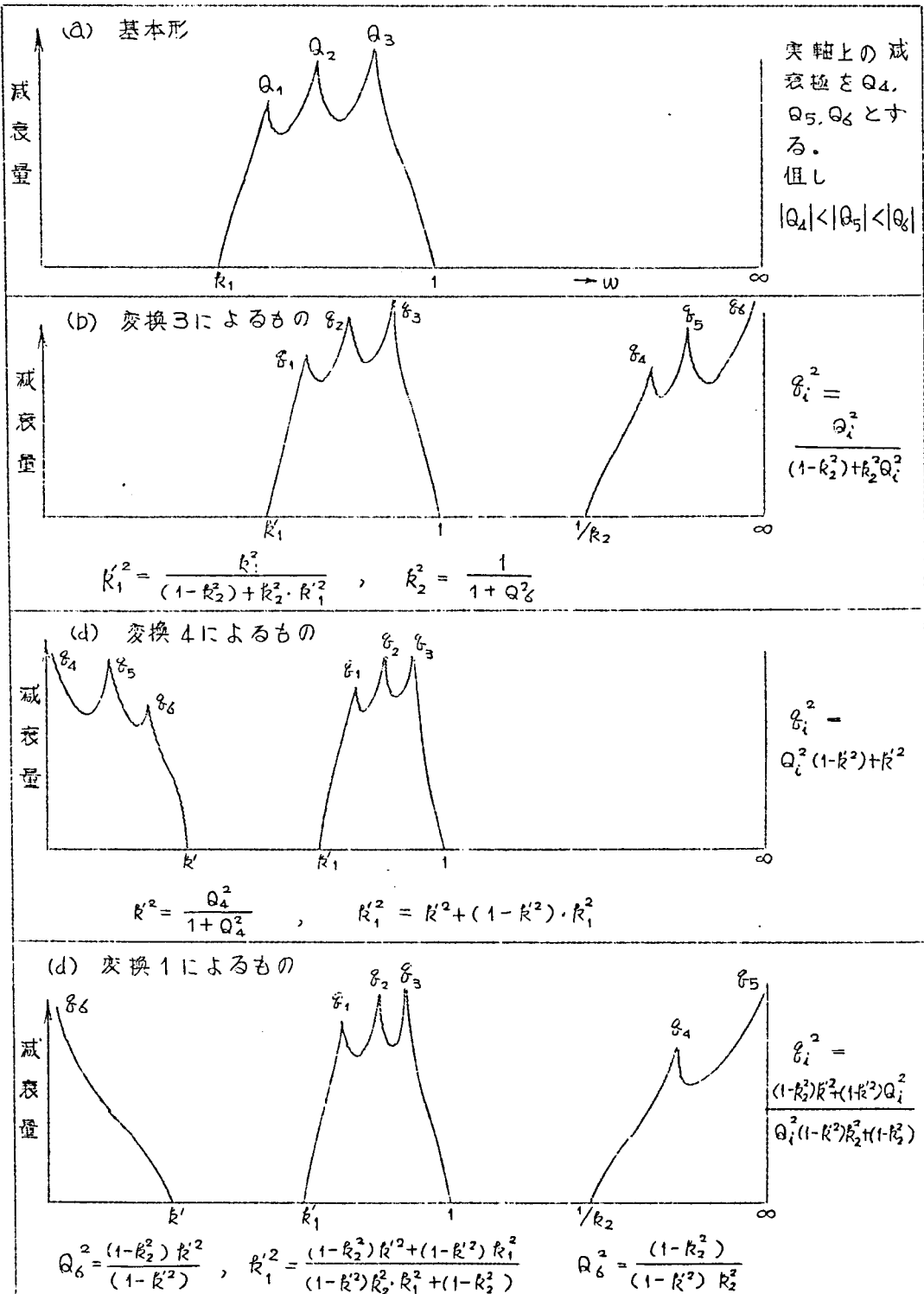
$$\phi(\lambda) = H \frac{\text{Ra} \left[\prod_{\mu=1}^N \{\sqrt{A_{\mu}(\lambda)} + \sqrt{B_{\mu}(\lambda)}\}^{2\delta_{\mu}} \right]}{\prod_{\mu=1}^N \prod_{\nu=1}^m (\lambda^2 + Q_{\mu\nu}^2)^{\delta_{\mu}}} \quad (2.3.26)$$

上式は単通過域濾波器の場合における基準面における一般化特性関数の表示式 (2.2.8) に対応しており、第2章で述べた事がこの場合にも殆んど成立するのである。即ち定数 H は通過域最小不整合減衰量によって決定されるものであり、又 δ_{μ} については $Q_{\mu\nu}$ が全ての ν について λ の虚数ならば、即ち λ の実軸上に減衰極が存在するならば δ_{μ} は (整数)/2 とする事が出来る。その他の場合には δ_{μ} は正又は負の整数でなければならない。 λ 面における減衰特性 $A(\Omega)_{db}$ とすれば第1章の基礎理論より次の様に計算出来る。

$$A(\Omega) = 17.3718 \left\{ \sum_{\mu=1}^N \delta_{\mu} \cdot A_{\mu}(\Omega) \right\} - 6.02 - A_e$$

$$\text{但し} \quad A_{\mu}(\Omega) = \begin{cases} \tanh^{-1} \sqrt{\left| \frac{A_{\mu}(j\Omega)}{B_{\mu}(j\Omega)} \right|} & ; \dots \left| \frac{A_{\mu}(j\Omega)}{B_{\mu}(j\Omega)} \right| < 1 \\ \coth^{-1} \sqrt{\left| \frac{A_{\mu}(j\Omega)}{B_{\mu}(j\Omega)} \right|} & ; \dots \left| \frac{A_{\mu}(j\Omega)}{B_{\mu}(j\Omega)} \right| > 1 \end{cases} \quad (2.3.27)$$

更に第2章の場合と同様に自乗一次変換によって基準面から色々な実現面に変換する事が出来る。基本形から第1章第1節の第1.1表における変換3, 変換4及び変換1によって得られる低域形, 高域形及び帯域形複通過域濾波器の



第 2.11 図 複通過域濾波器の自乗一次変換の説明図

の特性が得られる。その様子を第 2.11 図に示す。これらの濾波器は種々の有用性が考えられ、例えば無限遠点、原点に減衰極を有する帯域阻止濾波器として設計し、浮遊容量或は漏洩インダクタンスを考慮に入れて設計する事も可能であり、又使用線輪の個数を減らした帯域阻止濾波器として設計することもできる。その他の色々の応用が考えられるが、次節以下に若干の特別な場合について述べよう。

2.3.2 減衰極を2個有する通過域チェビシェフ特性濾波器の設計理論

減衰極を2個有する場合、即ち式(2.3.1)に於て $m=2$ の場合を考えよう。未定多項式 $R(\lambda)$ は式(2.3.19) から一次式であって

$$R(\lambda) = R \cdot \lambda \quad (2.3.28)$$

と表わされる。さて定理6から

$$\begin{cases} (\lambda^2 + R_1^2)(\lambda^2 + 1) R^2 \lambda^2 = A(\lambda) \cdot B(\lambda) & (2.3.29) \\ (\lambda^2 + Q_1^2)(\lambda^2 + Q_2^2) = A(\lambda) - B(\lambda) & (2.3.30) \end{cases}$$

を充す $A(\lambda)$ 、 $B(\lambda)$ を求めることが出来る。式(2.3.29)の各因子の組合せによって $A(\lambda)$ 、 $B(\lambda)$ を表わし式(2.3.30)を充すものをとれば第 2.4 表に示す三個の特性条件が成立可能であり三種類の設計公式が導かれる。第 2.4 表は基準面における公式を示すが前節第 2.11 図に示した様に自乗一次変換によって p 面における色々な基本形が得られその一次結合によって多彩な複通過域濾波器が得られるのである。

No.	$A(\lambda), B(\lambda)$	$\sqrt{A(\lambda)} + \sqrt{B(\lambda)}$	R	特性条件	基準面における理想伝達関数
1	$A = (\lambda^2 + R_1^2)(\lambda^2 + 1)$ $B = R^2 \lambda^2$	$\sqrt{(\lambda^2 + R_1^2)(\lambda^2 + 1)} + R\lambda$	$R = (Q_1^2 - 1)(Q_2^2 - 1)$	$R_1^2 = Q_1^2 \cdot Q_2^2$	$\sinh^{-1} j \frac{\sqrt{(\lambda^2 + R_1^2)(\lambda^2 + 1)}}{\sqrt{(\lambda^2 + Q_1^2)(\lambda^2 + Q_2^2)}}$
2	$A = \lambda^2(\lambda^2 + 1)$ $B = R^2(\lambda^2 + R_1^2)$	$\lambda\sqrt{\lambda^2 + 1} + R\sqrt{\lambda^2 + R_1^2}$	$R^2 = 1 - (Q_1^2 + Q_2^2)$	$R_1^2 = \frac{Q_1^2 \cdot Q_2^2}{Q_1^2 + Q_2^2 - 1}$	$\sinh^{-1} \frac{\lambda\sqrt{\lambda^2 + 1}}{\sqrt{(\lambda^2 + Q_1^2)(\lambda^2 + Q_2^2)}}$
3	$A = \lambda^2(\lambda^2 + R_1^2)$ $B = R^2(\lambda^2 + 1)$	$\lambda\sqrt{\lambda^2 + R_1^2} + R\sqrt{\lambda^2 + 1}$	$R^2 = -Q_1^2 Q_2^2$	$R_1^2 = Q_1^2 + Q_2^2 - Q_1^2 Q_2^2$	$\sinh^{-1} \frac{\lambda\sqrt{\lambda^2 + R_1^2}}{\sqrt{(\lambda^2 + Q_1^2)(\lambda^2 + Q_2^2)}}$

第 2.4 表 減衰極を2個有する複通過域濾波器の基準面における設計公式

第2.4表から容易にわかる様に2つの減衰極 Q_1^2 , Q_2^2 は3つの場合によってそれぞれ制限があり、その符号は次に示す様になっていなければならない。

- No.1の場合 ; Q_1^2, Q_2^2 は共に負であること。
- No.2の場合 ; Q_1^2, Q_2^2 は互に異符号であること。
- No.3の場合 ; Q_1^2, Q_2^2 は互に異符号であること。

2.3.3 減衰極を3個有する複通過域濾波器の設計理論

3個の減衰極を Q_1, Q_2, Q_3 としたとき、未定多項式 $R(\lambda)$ は $(2m-4)+1=3$ 次式であって次の様に表わすことが出来る。

$$R(\lambda) = R \cdot \lambda (\lambda^2 + \alpha^2) \quad (2.3.31)$$

定理6から

$$\begin{cases} (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + Q_1^2) \cdot R^2 \cdot \lambda^2 (\lambda^2 + \alpha^2)^2 = A(\lambda) \cdot B(\lambda) & (2.3.32) \\ (\lambda^2 + Q_1^2)(\lambda^2 + Q_2^2)(\lambda^2 + Q_3^2) = A(\lambda) - B(\lambda) & (2.3.33) \end{cases}$$

となる $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ を求めよう。 $\alpha^2 = Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2$ の場合は前節の場合に帰着するので除けば第2.5表に示す様に4種類の特性条件の下に相異なる設計公式が得られる。前節の場合と同様に第2.5表に於ては基準面における設計公式が示されているが自乗一次変換によって p 面における色々の基本形式を得、その一次結合によって多数の減衰極をもつ複通過域濾波器の特性関数が得られる。

No	$\sqrt{A(\lambda)} + \sqrt{B(\lambda)}$	R^2	α^2	特 性 条 件	基準面における理想伝送量関数
1	$(\lambda^2 + \alpha^2)\sqrt{\lambda^2 + 1} + R \cdot \lambda \sqrt{\lambda^2 + k_1^2}$	$1 - \xi_1 + 2\sqrt{\xi_3}$	$\sqrt{\xi_3}$	$(\xi_1 - 2\sqrt{\xi_3} - 1)k_1^2 - \xi_2 + \xi_3 + 2\sqrt{\xi_3} = 0$	$\sinh^{-1} \frac{(\lambda^2 + \alpha^2)\sqrt{\lambda^2 + 1}}{\sqrt{(\lambda^2 + Q_1^2)(\lambda^2 + Q_2^2)(\lambda^2 + Q_3^2)}}$
2	$(\lambda^2 + \alpha^2)\sqrt{\lambda^2 + k_1^2} + R \cdot \lambda \sqrt{\lambda^2 + 1}$	$k_1^2 + \frac{2\sqrt{\xi_3}}{k_1} - \xi_1$	$\frac{\sqrt{\xi_3}}{k_1}$	$k_1^4 - 2\sqrt{\xi_3}k_1^3 + (\xi_2 - \xi_1)k_1^2 + 2\sqrt{\xi_3}k_1\xi_3 = 0$	$\sinh^{-1} \frac{(\lambda^2 + \alpha^2)\sqrt{\lambda^2 + k_1^2}}{\sqrt{(\lambda^2 + Q_1^2)(\lambda^2 + Q_2^2)(\lambda^2 + Q_3^2)}}$
3	$\lambda\sqrt{(\lambda^2 + k_1^2)(\lambda^2 + 1)} + R(\lambda^2 + \alpha^2)$	$1 - \xi_1 + k_1^2$	$\frac{k_1^2 - \xi_2}{2(1 - \xi_1 + k_1^2)}$	$k_1^2 + \frac{2(\xi_1 - \xi_2 - 1)}{\sqrt{1 + (\xi_1 - \xi_2 - 1)\frac{1}{\xi_3} - 1}} - \xi_2 = 0$	$\sinh^{-1} \frac{\lambda\sqrt{(\lambda^2 + k_1^2)(\lambda^2 + 1)}}{\sqrt{(\lambda^2 + Q_1^2)(\lambda^2 + Q_2^2)(\lambda^2 + Q_3^2)}}$
4	$\lambda(\lambda^2 + \alpha^2) + R \cdot \sqrt{(\lambda^2 + k_1^2)(\lambda^2 + 1)}$	$2 - \xi_1 \pm \sqrt{\xi_4}$	$1 \pm \sqrt{\xi_4}$	$k_1^4\xi_4 - [\xi_3 - k_1^2(\xi_1 - 2)]^2 = 0$	$\sinh^{-1} \frac{\lambda(\lambda^2 + \alpha^2)}{\sqrt{(\lambda^2 + Q_1^2)(\lambda^2 + Q_2^2)(\lambda^2 + Q_3^2)}}$
備 考		$\xi_1 = Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2$, $\xi_2 = Q_1^2Q_2^2 + Q_2^2Q_3^2 + Q_3^2Q_1^2$, $\xi_3 = Q_1^2Q_2^2Q_3^2$, $\xi_4 = (1 - Q_1^2)(1 - Q_2^2)(1 - Q_3^2)$			

第 2.5 表 減衰極を三個有する複通過域濾波器の基準面における設計方式

2.3.4 設 計 例

複通過域濾波器の設計例として減衰極 4 個を有する回路次数 8 次のものであげよう。実平面において無限遠点に 2 位且原点にも 2 位の減衰極を設ける事にする。

実平面における第 1 通過域 (150 kc ~ 200 kc) \rightarrow (k' , k'_1)

実平面における第 2 通過域 (400 kc ~ 550 kc) \rightarrow (1 , k_2^{-1})

今 550 kc を基準として第 1 通過域を (k' , k'_1) とし第 2 通過域を (1 , k_2^{-1}) と表わせば

$$k' = 0.37500 \quad k'_1 = 0.50000 \quad k_2^{-1} = 1.3750$$

さて k' を λ 平面の原点に k_2^{-1} を λ 平面の無限遠点に対応させる λ^2 の 1 次変換は

$$\lambda^2 = \frac{1 - k_2^2}{1 - k'^2} \frac{p^2 + k'^2}{k_2^2 p^2 + 1}$$

となる。 p 平面の原点と無限遠点は λ 平面で Q_{10} , $Q_{2\infty}$ に写像されたとするは

$$Q_{10}^2 = \frac{(1 - k_2^2) k'^2}{k'^2 - 1} = -0.07708 \ 4898 \ 5725 \ 0187 \ 83$$

$$Q_{2\infty}^2 = \frac{1 - k_2^2}{(k'^2 - 1) k_2^2} = -1.036 \ 3636 \ 3636 \ 3636 \ 36$$

さて λ 面に於て Q_{10} に減衰極を有する基準形と $Q_{2\infty}$ に減衰極をおく基準形の組合せによって複通過域濾波器の特性関数を求めることとする。

第 2.4 表 No. 2 の場合について設計する。

$$\begin{aligned} h^*(\lambda) &= R_a \left[(\sqrt{A_1(\lambda)} + \sqrt{B_1(\lambda)})^2 (\sqrt{A_2(\lambda)} + \sqrt{B_2(\lambda)})^2 \right] \\ &= R_a \left[(\lambda \sqrt{\lambda^2 + 1} + R_0 \sqrt{\lambda^2 + k_1^2})^2 (\lambda \sqrt{\lambda^2 + 1} + R_\infty \sqrt{\lambda^2 + k_1^2})^2 \right] \end{aligned}$$

$$\text{但し } R_0^2 = 1 - (Q_{10}^2 + Q_1^2), \quad R_\infty^2 = 1 - (Q_{2\infty}^2 + Q_2^2)$$

特性条件から減衰極 Q_1^2 , Q_2^2 が求まる。

$$Q_1^2 = 0.509$$

$$Q_2^2 = 0.1272$$

$$\begin{aligned}
 h^*(\lambda) &= \lambda^8 \cdot 1.0 \\
 &+ \lambda^6 \cdot 8.642\ 3741\ 5477\ 0848\ 323 \\
 &+ \lambda^4 \cdot 9.185\ 6539\ 8538\ 3511\ 293 \\
 &+ \lambda^2 \cdot 0.6087\ 6542\ 2133\ 3616\ 676 \\
 &+ 0.005176\ 2132\ 9437\ 7109\ 162
 \end{aligned}$$

さて $h^*(\lambda)$ より基本方程式を解き, λ 平面から p 平面に変換すれば $g(p)$, $h(p)$ $f(p)$ が求まる。その結果は次の如くである。(但し $A_e = 15\text{ db}$)

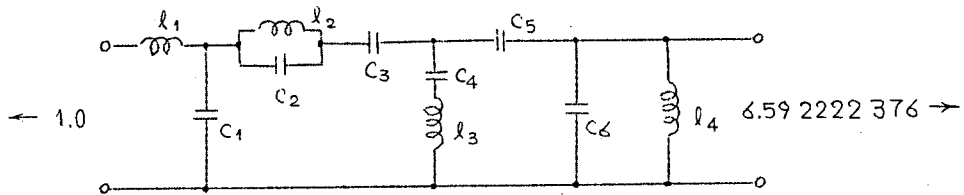
$$\begin{aligned}
 h(p) &= p^8 + 3.134\ 1911\ 7647\ 0588\ 253 \cdot p^6 \\
 &+ 2.900\ 6482\ 8206\ 0986\ 243 \cdot p^4 \\
 &+ 0.8051\ 3449\ 2761\ 9486\ 157 \cdot p^2 \\
 &+ 0.06646\ 7285\ 1562\ 5001\ 207
 \end{aligned}$$

$$f(p) = p^2 (p^2 + 0.717095588235294\ 207)(p^2 + 0.332031250000\ 0000)$$

$$\begin{aligned}
 g(p) &= (p^2 + 0.1629\ 1824\ 4023\ 2021\ 752 \cdot p + 0.128\ 2226\ 7141\ 75498933) \\
 &(p^2 + 0.07232\ 8257\ 0356\ 2901\ 14 \cdot p + 0.2753\ 075841768387433) \\
 &(p^2 + 0.69368763\ 9200\ 6681\ 44 \cdot p + 2.103\ 8978\ 0356\ 5047525) \\
 &(p^2 + 0.1529\ 8302\ 4066\ 0630\ 164 \cdot p + 0.8949\ 5315\ 6027\ 9442\ 57)
 \end{aligned}$$

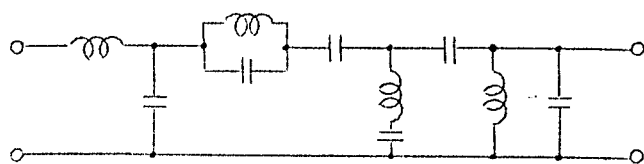
これから回路を構成すれば第 2.13 図 (a) の様になり, その動作伝送特性は第 2.13 図 (b) の様になる。

尚回路素子の規準値 (インピーダンス $1\ \Omega$, 基準周波数 1 c/s に対してヘッリー, ファラッドで示す) は下の如くである。(第 2.12 図参照)

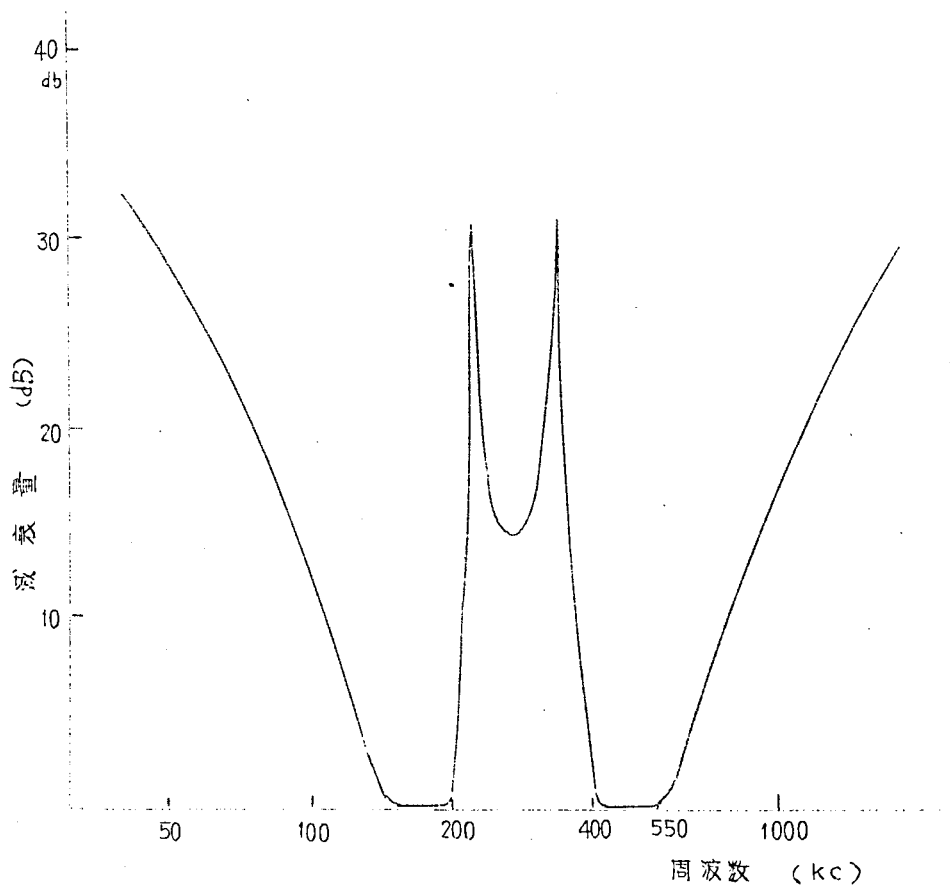


$l_1 = 1.848\ 5703\ 58$	$C_1 = 0.263\ 9477\ 75$
$l_2 = 2.275\ 9588\ 16$	$C_2 = 0.612\ 7150\ 53$
$l_3 = 8.246\ 2573\ 60$	$C_3 = 1.613\ 9082\ 11$
$l_4 = 6.704\ 1635\ 86$	$C_4 = 0.365\ 2280\ 75$
	$C_5 = 1.046\ 5052\ 43$
	$C_6 = 0.137\ 4756\ 69$

第 2.12 図 複通過域濾波器の基準回路と素子値



(a) 回路構成



b) 伝送特性

第 2.13 図 減衰極 2 個有する複通過域濾波器の実現回路と伝送特性

235 第2.3節の結論

本章に於ては第1章の一般論の意義を更によく説明するものとして通過域を2個有する通過域チエビシエフ特性濾波器の設計理論を述べたものであった。通過域を2個有する複通過域濾波器の理想伝送量関数は必しも初等的に積分出来ないが、帯域係数 k_1 と減衰極 Q_p との間に只1個の関係(これを特性条件と言う)を仮定するだけで S 及び Ω が初等的に算出される事を証明した。その例として減衰極が2個の場合、減衰極が3個の場合の特性条件とその特性関数を求めた。それらの自由な組合せで多彩な減衰特性が得られる。その設計例では減衰極を2個有する濾波器を基本とし ω^2 の1次変換の助けにより減衰極4個(8次)もつ複通過濾波器を実現した。この様な濾波器が設計出来る事は今まで考えられなかったところであった。

第 3 章

リアクタンス梯子形

回路網の構成理論

本章に於ては帯域濾波器の構成理論を主として述べている。前章に於て導かれた帯域濾波器は従来知られていなかったものであったから、その構成法も当然未知であった。本章ではリアクタンス帯域濾波回路が負素子を含まないで構成されるための充分条件を導き、前章の近似論と関連して如何なる帯域濾波特性もパラメーター A_e (通過域最小不整合減衰量) を適当にとれば必ず正素子で実現出来るという重要な定理を導いた。次に帯域濾波器が最小の個数の線翰を使用して構成出来るための充分条件を導き、その構成法を導いた。これは実用上極めて重要な方法であり、理論を十分実用化し得る様にしてある。又その特別な場合として対称減衰特性濾波器の最小線翰回路実現のための計算法「三次インピーダンス展開法」を開発実用化して本章に記述している。又 回路網の自由度と線翰の個数の関係を基礎的に考察し、リアクタンス回路のみならず一般の RCL 回路にも及ぶ基礎定理を得ている。その実用的応用として、前章に於て設計法を述べた $\left[\frac{N-1}{2} \right]$ 個の線翰を有する濾波器が得られた。この様な濾波器は未だ知られなかったものである。

尚代表的設計例を2例あげている。これらは何れも本研究によって始めて実現し得た濾波器で、今まで LC 濾波器では考えられなかった急峻な遮断特性が最小線翰数回路で経済的に実現されている。

第3.1節 回路次数と構成素子 ^{(49) (55)}

3.1.1 は し が き

第2章の理論によって得られた伝達係数を実際の回路として構成する際、回路構成の複雑さの目安となるものは、伝達係数 $S(p)$ の次数である。実用上の見地からは与えられた次数の伝達係数を実現するのに構成素子の価格の総和が最も安価であることが望ましい。逆に言えば、与えられた個数の素子を使用して、その回路の伝達係数の次数を最大ならしめる事が望ましいのである。伝達係数の次数は無限遠点を除き全 p 平面上に存在する零点 (n 重零点は n 個として数える) に等しく、換言すれば回路網の自然振動状態の数即ち回路網の自由度に等しい。本節に於てはこの様な回路構成問題の基礎的考察として回路網の自由度と構成素子の関係について述べるものである。そのために先ず回路網を位相幾何学的に考察しなければならない。

3.1.2 線形グラフとそのベクトル空間表示 ^{(46) (48)}

相互誘導を含まない RLC 回路網において構成素子の個数が n であるものとするとき、この回路網は m 個の節点とそれらに接続している n 個の枝からなる線形グラフに対応することが出来る。今 m 個の節点 P_i ($i = 0, 1, 2, \dots, m-1$) とそれらを結び節点に於てのみ交わる n 個の枝 e_{μ} ($\mu = 1, 2, \dots, n$) からなる線形グラフを G と表わす。如何なる枝とも接続しない孤立節点は認めないものとするれば、枝 e_{μ} の集合 $\{e_{\mu}\}$ はグラフ G を表わし、 $\{e_{\mu}\}$ のあらゆる部分集合は、グラフ G のあらゆる部分グラフを表わす。従ってグラフ G 及びその全ての部分グラフは n 個の枝に夫々対応する n 個の基底ベクトルによって張られる n 次元ベクトル空間に写像する事が出来る。

(定義 1)

グラフ G の部分グラフ G_{α} は n 次元ベクトル G_{α} によって表わされるものとする。但し

$$G_\alpha = [g_1^\alpha, g_2^\alpha, \dots, g_n^\alpha] - [g_x^\alpha] \quad (3.1.1)$$

$$g_x^\alpha \begin{cases} 0 & \dots\dots\dots e_x \notin G_\alpha \\ 1 & \dots\dots\dots e_x \in G_\alpha \end{cases}$$

ここで $[]$ は g_x^α の集合を意味するものとする。

この定義によって色々な部分グラフがベクトル表示される。その二三の例を次に示す。

$$(a) \text{ 枝ベクトル : } E_\nu = [\delta_{x\nu}^\nu] \quad (3.1.2)$$

$$\text{但し } \delta_{x\nu}^\nu = \begin{cases} 1 & \dots\dots\dots x = \nu \\ 0 & \dots\dots\dots x \neq \nu \end{cases}$$

$$(b) \text{ 節点ベクトル : } P_i = [p_{x\ell}^i] \quad (3.1.3)$$

$$\text{但し } p_{x\ell}^i = \begin{cases} 1 & \dots\dots\dots \text{枝 } e_{x\ell} \text{ が節点 } P_i \text{ に接続している場合} \\ 0 & \dots\dots\dots \text{枝 } e_{x\ell} \text{ が節点 } P_i \text{ に接続していない場合} \end{cases}$$

$$(c) \text{ 閉路ベクトル : } C_\ell = [C_{x\ell}^\ell] \quad (3.1.4)$$

$$\text{但し } C_{x\ell}^\ell = \begin{cases} 1 & \dots\dots\dots \text{枝 } e_{x\ell} \text{ が閉路 } C_\ell \text{ に属している場合} \\ 0 & \dots\dots\dots \text{枝 } e_{x\ell} \text{ が閉路 } C_\ell \text{ に属していない場合} \end{cases}$$

〔定義 2〕

ベクトル $A = (\alpha_x)$, $B = (\beta_x)$, $C = (\gamma_x)$ に対して演算を次の如く定義する。

$$i) \quad A \oplus B = C \quad (3.1.5)$$

$$\text{但し } \alpha_x + \beta_x \equiv \gamma_x \pmod{2}$$

$$ii) \quad \varepsilon A = \begin{cases} 0 \text{ (零ベクトル)} & \dots\dots\dots \varepsilon = 0 \text{ の場合} \\ A & \dots\dots\dots \varepsilon = 1 \text{ の場合} \end{cases} \quad (3.1.6)$$

〔定義 3〕

ベクトルの組 A_1, A_2, \dots, A_k に於て、悉くは零ではない適当な係数の

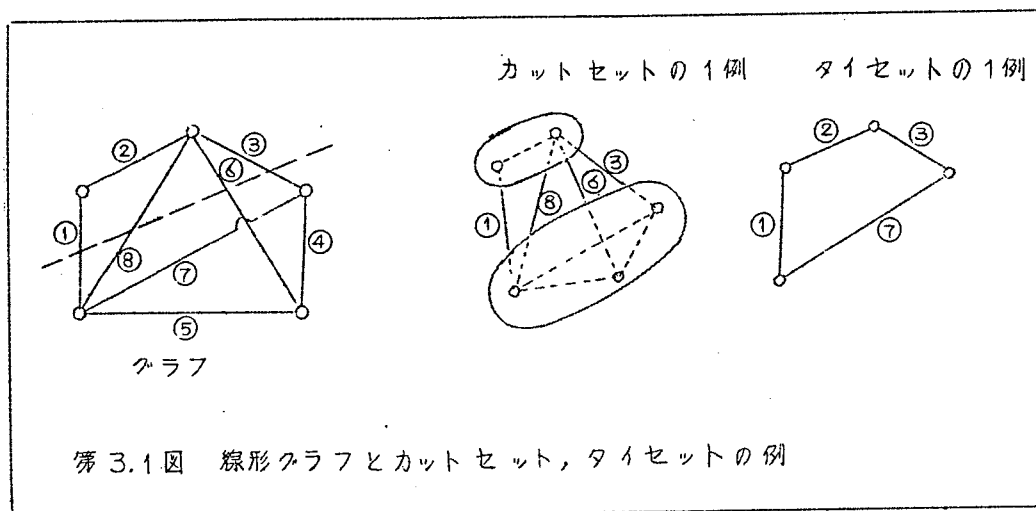
組 $\{\varepsilon_i\}$ が存在して

$$\varepsilon_1 A_1 \oplus \varepsilon_2 A_2 \oplus \varepsilon_3 A_3 \oplus \cdots \oplus \varepsilon_R A_R = 0 \quad (\text{零ベクトル})$$

となる時ベクトルの組 A_1, A_2, \cdots, A_R は一次従属であるという。一次従属でないベクトルの組は一次独立であるという。

(定義 4)

幾つかの節点ベクトル P_i の演算 \oplus による一次結合によって生ずる新しいベクトルをカットセット(ベクトル)と名付ける。⁽²⁸⁾ 又幾つかの閉路ベクトル C_ℓ の演算 \oplus による一次結合によって生ずる新しいベクトルをタイセット(ベクトル)と名付ける。⁽²⁸⁾



カットセットとは或る節点の集合から残りの節点の集合に接続する枝の集りを意味し、タイセットとは閉路を形成する枝の集りを意味するものであって、回路網トポロジーの基本的概念で多くの論文著書にそれらの性質について述べられている。カットセット、タイセットの1例は第3.1図に示されている。

さてカットセットのベクトル表示に於て、その一次結合は矢張りカットセットベクトルであり、可能な全てのカットセットベクトルの集合は有限個の一次独立な基底ベクトルの一次結合によって全て表わされる事がわかる。よく知られている様に n 個の枝、 m 個の節点から成る線形グラフ G に於ては一次独立なカットセットの数は $(n - m)$ である。但し m は線形グラフ G の成分の数(独立接続部分の数)である。この事から G のカットセットベクトルの集合

$\{P\}$ は階数 $(m-8)$ の自由アベル群である事が知られる。同様に G のタイセットベクトルの集合 $\{C\}$ は階級 $(n-m+8)$ の自由アベル群である事が知られるのである。

3.1.3 最小線輪数回路

LC回路網の自由度についてはE. A. Guillemin⁽²⁸⁾ がその著書に述べているが、Rを含む一般のLCR回路網についてはやや複雑となる。最近 Abraham Bers⁽²⁷⁾ がこの問題を考察した。A. Bers⁽²⁷⁾ によれば、“回路網の自由度（即ち自然振動状態の数）はエネルギー蓄積素子（即ちL或はC）の総数から、電圧及び電流に関する一次独立な束縛条件の数を引いたものに等しい”。即ち相互誘導を含まず、 n_L 個の線輪 n_C 個の蓄電器を有するLCR回路網に於て、Lだけから成るカットセット及びタイセットの群 $\{P_L\}, \{C_L\}$ の階数を夫々 v_L, l_L としCだけから成るカットセット及びタイセットの群 $\{P_C\}, \{C_C\}$ の階数を夫々 v_C, l_C とするとき、この回路網の自由度 N は次式で与えられる。

$$N = n_L + n_C - (v_L + v_C + l_L + l_C) \quad (3.1.7)$$

A. Bers は v_L, v_C, l_L, l_C を求めるのに次の如くした。即ちこの回路網に於て全ての抵抗、全てのLを短絡して得られる部分グラフのカットセット群の階数が v_C に等しく、全てのCを短絡して得られる部分グラフのカットセット群の階数が v_L に等しい。又この回路網の全ての抵抗、全てのLを開放して得られる部分グラフのタイセット群の階数が l_C に等しく、全ての抵抗、全てのLを開放して得られる部分グラフのタイセット群の階数が l_L に等しい。この性質によって与えられたRLC回路網から容易に v_L, v_C, l_L, l_C を知る事が出来たのである。

さて本節に於ては A. Bersの結果を利用して回路網の自由度 N とL, C, Rの各素子数の関係を更に詳細に考察しよう。先ず次の補助定理を述べる。

〔補助定理 1〕

相互誘導を含まないLCR回路網の全てのタイセットから成る自由アベル群

を $\{P\}$ とするとき、 $\{P\}$ は階数が夫々 v_C, v_L, v_R 及び v' なる部分群 $\{P_C\}, \{P_L\}, \{P_R\}$ 及び $\{P'\}$ に直和分解される。但し $\{P_C\}, \{P_L\}, \{P_R\}$ は夫々 C, L 及び R からなるカットセットの集合である。

即ち

$$\{P\} = \{P_C\} \dot{+} \{P_L\} \dot{+} \{P_R\} \dot{+} \{P'\} \quad (3.1.8)$$

但し $\dot{+}$ は群の直和を示すものとする。

又 $\{P\}$ の階数 v は次式で表わされる。

$$v = v_C + v_L + v_R + v' \quad (3.1.9)$$

〔証明〕

LCR 回路網のタイセットの集合は階数 $(m-8)$ の自由アベル群をなす。又 C のみからなるタイセットの集合 $\{P_C\}$ もアベル群であって $\{P\}$ の部分群である。自由アベル群の部分群は又自由アベル群であって、単因子定理によって、 $\{P\}$ の v 個の基底ベクトルのうち v_C 個だけは $\{P_C\}$ の基底ベクトルとなっている様にする事が出来る。

残りの $(v-v_C)$ 個の基底ベクトルにより生成される自由アベル群について、 L のみからなる部分群 $\{P_L\}$ を考えると、全く同様にして、直和に分解される。次に残りの $(v-v_C-v_L)$ 個の基底ベクトルにより生成される自由アベル群を更に部分群 $\{P_R\}$ に直和分解すれば、最後に階数 $v' = v - v_C - v_L - v_R$ なる自由アベル群 $\{P'\}$ が得られるのである。従って式 (3.1.8) 式 (3.1.9) が成立する。(証終り)

さてカットセットについても上の補助定理に述べた事がそのまま成立するのであり、それを次の補助定理とする。

〔補助定理 2〕

相互誘導を含まない LCR 回路網の全てのカットセットから成る自由アベル群 $\{C\}$ は階数が夫々 l_C, l_L, l_R である部分群 $\{C_C\}, \{C_L\}, \{C_R\}$ 及び $\{C'\}$ に直和分解される。但し $\{C_C\}, \{C_L\}, \{C_R\}$ は夫々 C, L 及び R からなるカットセットの集合である。即ち次式が成立する。

$$\{C\} = \{C_C\} + \{C_L\} + \{C_R\} + \{C'\} \quad (3.1.10)$$

$$l = l_C + l_L + l_R + l' \quad (3.1.11)$$

〔証明〕 省 略 （補助定理1の場合と全く同様である）

さて与えられた個数の素子を用いて回路を構成する際その回路の自由度を最大ならしめる事が望ましい。先ず最初に線輪の個数と抵抗の個数を定めて、蓄電器の個数に制限を設けない時 如何にすれば自由度を最大とすることが出来るか、そしてその時、最大の自由度の値は如何になるかを調べよう。通常線輪の価格は蓄電器の夫れに比して著しく高価であり、又抵抗の個数は定損失に関係するから、この問題は実用上にも極めて重要である。それに関して次の定理が成立する。

〔定理1〕

n_L 個の誘導線輪、 n_R 個の抵抗及び必要に応じて任意個数の蓄電器を用いて、相互誘導を含まないLCR回路網を構成する際、その自由度を最大ならしめるための必要且充分条件は次の通りである。又その時得られる最大自由度は $2n_L + n_R$ に等しい。

- i) 線輪のみからなるタイセット及びカットセットは存在しない事
- ii) 抵抗のみからなるタイセット及びカットセットは存在しない事
- iii) 線輪及び抵抗からなるタイセット及びカットセットは存在しない事

〔証明〕

（必要性）；先ず適当に構成された n_C 個の蓄電器だけで出来上った回路網を考えよう。この回路網の自由度は(3.1.7)より

$$N = n_C - (l_C + v_C) = 0 \quad (3.1.12)$$

となる。このC-回路網に1個の線輪を接続してNを最も大とするには l_C 或は v_C を1だけ減少させねばならない。即ち $N = n_C + 1 - (l_C + v_C - 1) = 2$ となる。この策にして線輪を1個挿入する毎にNが2だけ増加するためには条件 i) が必要である。

又抵抗を1個挿入して来る事により l_C 或は v_C を1だけ減少させるためには条件 ii) 及び iii) が必要である。従って $N = n_C + 1 - [(l_C + v_C - 1) - 1] = 3$

となる。

故に条件 i) ii) 及び iii) が成立する限り抵抗を 1 個導入すれば N は 1 だけ増加し線輸を 1 個導入すれば N は 2 だけ増加する。即ち十分大なる n_C に対しては最大自由度は $2n_L + n_R$ となる。

(十分性) ; n_C 個の蓄電器, n_L 個の線輸, n_R 個の抵抗からなる LCR 回路網が条件 i) ii) 及び iii) を充しているものとする。

明らかに

$$n_C + n_L + n_R = l + v \quad (3.1.13)$$

式 (3.1.9) 式 (3.1.11) より

$$n_C + n_L + n_R = l_C + l_L + l_R + l' + v_C + v_L + v_R + v' \quad (3.1.14)$$

従って回路網の自由度 N は式 (3.1.7) 式 (3.1.14) から次の様に表わされる。

$$N = l_R + v_R + l' + v' - n_R \quad (3.1.15)$$

さてこの回路網に於て蓄電器に相当する枝を取除いた部分グラフ G' を考える。 G' に於ては C を含む全てのタイセツトは消滅する。もとの回路網に対応するグラフ G のタイセツトの基底を適当にとり l_C 個はそのまま C のみのタイセツト群の基底, l_L 個は L のみのタイセツト群の基底, l_R 個は R のみのタイセツトの基底となる様にしたとき, G' のタイセツト群の基底として l_L 個, l_R 個の基底は不変であるが l_C 個の基底はもはやタイセツトではなく, 従って次式を得る。

$$(G' \text{ のタイセツトの階数}) = l_L + l_R + l'_{LR} \quad (3.1.16)$$

但し l'_{LR} は G に於ける L と R からなるタイセツトの独立なものの数を表わす。

又 G' のカットセツトに関しては $v_C = 0$ となるが, v' は不変である。何故ならば v' 個の基底によって生成されるカットセツト群は全て L, C, R の二種或は三種の素子を構成要素としているから, C を開放する事によっても零とならないし, 依然としてカットセツト群を形成する。

従って

$$(G' \text{ のカットセツトの階数}) = v_L + v_R + v' \quad (3.1.17)$$

次に蓄電器に相当する枝を短絡，即ち枝の両端を同1節点とする部分グラフ G'' を考えよう。今度はタイセットに於て $l_C = 0$ となるが l' は不変となる。即ち次式が得られる。

$$(G'' \text{ のタイセットの階数}) = l_L + l_R + l' \quad (3.1.18)$$

しかしカットセットに於ては

$$(G'' \text{ のカットセットの階数}) = v_L + v_R + v'_{LR} \quad (3.1.19)$$

が成立する。但し v'_{LR} は G に於ける L と R からなるカットセットの独立なもの数である。

一方

$$\left. \begin{aligned} (n_L + n_R) &= (G' \text{ のタイセットの階数}) + (G' \text{ のカットセットの階数}) \\ (n_L + n_R) &= (G'' \text{ のタイセットの階数}) + (G'' \text{ のカットセットの階数}) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.20)$$

であり，(3.1.16) (3.1.17) (3.1.18) (3.1.19) の諸式より

$$2(n_L + n_R) = 2(l_L + v_L + l_R + v_R + l' + v') + l'_{LR} + v'_{LR} \quad (3.1.21)$$

又 (3.1.15) (3.1.21) から

$$N = 2(n_L - l_L - v_L) + (n_R - l_R - v_R) - l'_{LR} - v'_{LR} \quad (3.1.22)$$

さて仮定により条件 i) から $l_L, v_L = 0$ 条件 ii) から $l_R, v_R = 0$ 又条件 iii) から $l'_{LR}, v'_{LR} = 0$ が導かれる。従って

$$N = 2n_L + n_R \quad (3.1.23)$$

(証明終り)

[系 1]

n_L 個の誘導線輪を適当に構成し，且任意個数の蓄電器と抵抗を任意に含む回路の自由度が n_L に対して最大値であるための必要且十分条件は，定理 1 に於ける条件 i) であり，自由度は次式で表わされる。

$$N = 2n_L + n'_R \quad (3.1.24)$$

$$\eta'_R = \eta_R - l_R - v_R - l'_{LR} - v'_{LR} \quad (3.1.25)$$

[証 明]

必要性は明白，十分性については(3.1.22)に於て $l_L = v_L = 0$ として (3.1.24)を得る。(終り)

定理1 から分る様に η_L 個 η_R 個の誘導線輪，抵抗をもつ回路網のとり得る最大の自由度を N_m とすれば， $N_m = 2\eta_L + \eta_R$ である。損失のない L と C を用いた $L-C-R$ 回路網に於てその自由度が N_m ならばこの回路を最小線輪回路網と言う事にする。

これは同時に最小抵抗数回路網ともなっている。若し L または C が損失を有すれば，抵抗の数が等価的に増加するわけであるが， L を L と R の直列回路， C を C と R の並列回路に置換して得られる回路網に於て， L ， C の損失分によって増加した抵抗は式(3.1.25)の η'_R を増加せしめない。即ち 損失のある L ， C を用いる L ， C ， R 回路網の次数は損失のない L ， C と R の回路網の次数に等しい。

定理1に於ては， L と R に注目したが同様な事は C と R についても成立する。それを次に述べておく。

[系 2]

η_c 個の蓄電器 η_R 個の抵抗を有する回路網が必要に応じて，任意個数の誘導線輪を含むものとするとき，とり得る自由度 N は次式で表わされる。

$$N = 2(\eta_c - l_c - v_c) + (\eta_R - l_R - v_R) - l'_{cR} - v'_{cR}$$

N を最大ならしめるための必要且十分条件は次の通りである。

$$i) \quad l_c, v_c = 0$$

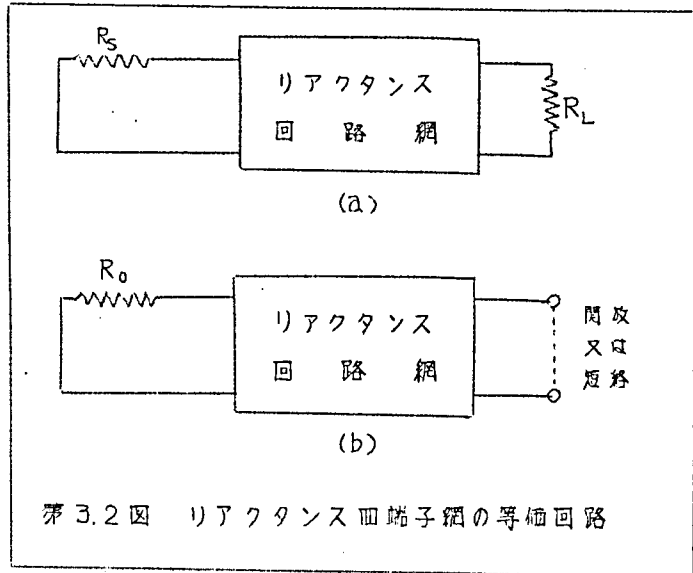
$$ii) \quad l_R, v_R = 0$$

$$iii) \quad l'_{cR}, v'_{cR} = 0$$

3.1.4 リアクタンス回路網の自由度と線輪数

前節に述べた最小線輪数回路網の考えを実用上重要なリアクタンス四端子回路網に適用して見る。使用状態に於けるリアクタンス四端子回路網の外力（強制入力源）を取除いた場合の等価回路を第3.2図に示す。通常リアクタンス四端子の次数と言うのは、第3.2図の等価回路に於ける自由振動姿態の数に等しいものである。

第3.2図(a)は動作減衰形、(b)は電圧（電流）減衰形の場合である。即ち動作減衰量リアクタンス濾波回路網においては $n_R = 2$ なる LCR



第3.2図 リアクタンス四端子網の等価回路

回路網と考え、電圧（電流）減衰リアクタンス濾波回路網に於ては $n_R = 1$ なる LCR回路網と考えて前節の定理1が成立する様に回路を構成すれば、最小線輪数リアクタンス濾波回路網が得られるのである。低域濾波器或は高域濾波器の場合には最小線輪数回路網は奇数次（対称形）の Π 端或は T 端の回路構成に外ならず、従来から知られているものである。ここでは実際に重要であり興味深い帯域濾波器の場合について考える。先ず一般的基礎事項から述べよう。⁽⁴⁵⁾⁽⁴⁷⁾

第1章に於て述べた様にリアクタンス四端子網に於ては

$$\left. \begin{aligned} G(p^2) &= 1 + \psi(p^2) \\ \left\{ \begin{aligned} G(p^2) &= S(p) \cdot S(-p) \\ \psi(p^2) &= \varphi(p) \cdot \varphi(-p) \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.26)$$

なる基本関係式が成立する。今特性関数 $\varphi(p)$ 、伝達係数 $S(p)$ を次の様に表わすことにする。

$$\left. \begin{aligned} S(p) &= \frac{g(p)}{f(p)} = \frac{G(p) + jU(p)}{f(p)} \\ Y(p) &= \frac{h(p)}{f(p)} = \frac{G'(p) + jU'(p)}{f(p)} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.27)$$

但し $G(p), G'(p)$: 偶関数部
 $U(p), U'(p)$: 奇関数部

$f(p)$ は虚軸上にのみ零をもつ M 次多項式, $g(p), h(p)$ は N 次の多項式であつて $M \leq N$ と仮定する. 尚 $S(p), Y(p)$ は既約とする.

さて式 (3.1.27) からこのリアクタンス四端子網の縦続マトリックス L は次式で表わされる.

$$L = \frac{1}{f(p)} \begin{bmatrix} a(p) & b(p) \\ c(p) & d(p) \end{bmatrix} \quad (3.1.28)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{f(p)} \begin{bmatrix} g_1(p) & p \cdot u_1(p) \\ p \cdot u_2(p) & g_2(p) \end{bmatrix} & \text{----- } f(p) : \text{偶} \\ \frac{1}{f(p)} \begin{bmatrix} p \cdot u_1(p) & g_1(p) \\ g_2(p) & p \cdot u_2(p) \end{bmatrix} & \text{----- } f(p) : \text{奇} \end{cases} \quad (3.1.29)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} g_1(p) &= G(p) \pm G'(p) & g_2(p) &= G(p) \mp G'(p) \\ p \cdot u_1(p) &= U(p) \pm U'(p) & p \cdot u_2(p) &= U(p) \mp U'(p) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.30)$$

縦続マトリックス L の同じ行又は列に属する要素関数の比はリアクタンス関数でなければならず, 又基本関係式より

$$a(p) \cdot d(p) - b(p) \cdot c(p) = f^2(p) \quad (3.1.31)$$

が成立しなければならない. 従つて式 (3.1.30) によつて定義された諸関数の次数の關係は第3.1表のようになっていなければならない. 又それらの諸関数の原点に於ける零点の多重度は第3.2表のようになっていなければならない.

第3.1表 リアクタンス四端子網の要素関数の次数関係

場合 次数	0	I	II	III	IV	V
N	g_1, g_2	g_1	g_2	pu_1	pu_2	pu_1, pu_2
N-1	pu_1, pu_2	pu_1, pu_2	pu_1, pu_2	g_1, g_2	g_1, g_2	g_1, g_2
N-2		g_2	g_1	pu_2	pu_1	
$f(p)$ の 次数	N	$\leq N-1$	$\leq N-1$	$\leq N-1$	$\leq N-1$	N

第3.2表 リアクタンス四端子網の要素関数の原点の零度多重度

多重度 場合	0	I	II
0	g_1, g_2	g_1	g_2
1	pu_1, pu_2	pu_1, pu_2	pu_1, pu_2
2		g_2	g_1
$f(p)$ の多重度	0	≥ 1	≥ 1

さてこの様なリアクタンス四端子網が最小線輪数回路網であるための条件を考察しよう。最小線輪数回路網とは動作減衰量濾波器の場合には次数が $N=2 \cdot n_L+2$ となるものであり、電圧（電流）減衰量濾波器の場合には次数が $N=2 \cdot n_L+1$ となるものである。両者をまとめて「最小線輪数回路構成のリアクタンス濾波器とは、次数 N に対し $\left[\frac{N-1}{2} \right]$ 個の線輪を有するもの」とする。但し $[]$ は整数部分をとる事を意味する。

最小線輪数のリアクタンス帯域濾波器に対して 3.1.3 の定理1を適用することによって次の定理を得る。

〔定理2〕

有限の内部抵抗を有する電源と、負荷抵抗との間で動作するリアクタンス帯域濾波器が、最小線輪数回路網であるための必要且充分条件は次の通りである。

- 1) L だけのカットセット及びタイセットを有しない事。
- 2) 原点（零周波数）に於て奇数個の減衰極を有する事
- 3) 特性関数の分子多項式 $h(p)$ は偶数次の多項式で、且その偶数部分多項式

の係数の符号変化の数は奇数である事。

(証明)

第3節の定理1から条件1)は当然。又抵抗が電源と負荷の2個であるから当然 $l_R, v_R = 0$ となり、最小線輪数回路であるためには $N = 2n_L + n_R = 2n_L + 2$ でなければならないから次数は偶数でなければならない。従って $l'_{LR}, v'_{LR} = 0$ となるための必要条件を求めれば足りる。それは電源側からみた入力インピーダンス $Z_S(w)$ 及び負荷側からみた出力インピーダンス $Z_L(w)$ を考察する事によって容易に求められ次の様に表わされる。

1) $v'_{LR} = 0$ となるためには

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \{Z_S(w)\} = 0, \quad \lim_{w \rightarrow \infty} \{Z_L(w)\} = 0 \quad (3.1.32)$$

2) $l'_{LR} = 0$ となるためには

$$\lim_{w \rightarrow 0} \{1/Z_S(w)\} = 0, \quad \lim_{w \rightarrow 0} \{1/Z_L(w)\} = 0 \quad (3.1.33)$$

さてリアクタンス四端子網の縦続マトリックスは式(3.1.28)で与えられ、その要素関数(3.1.30)の各々の次数及び原点に於ける零の多重度は、夫々第3.1表、第3.2表の如くなっている。従って式(3.1.32)式(3.1.33)の条件が全て成立するためには次の3条件が必要且十分である事がわかる。

1) Z_S について成立する条件は Z_L についても成立しなければならないから L 及び $(L)^{-1}$ の各要素関数の次数関係は同じでなければならない。 $N = 偶$ であるから結局(3.1.29)の第2番目の表示式が成立すべきである。即ち $f(p)$ は p の奇関数でなければならない。

2) 式(3.1.32)が成立するためには $N = 偶$, $f = 奇関数$ を考慮すれば、第3.1表の場合 II が成立しなければならない。即ち

$$\begin{cases} g_2(p) = G(p) \mp G'(p) = N \text{ 次偶多項式} \\ pu_1(p) = U(p) \pm U'(p) = (N-1) \text{ 次奇多項式} \\ pu_2(p) = U(p) \mp U'(p) = (N-1) \text{ 次奇多項式} \\ g_1(p) = G(p) \pm G'(p) = (N-2) \text{ 次偶多項式} \end{cases}$$

3) 式(3.1.32) が成立するためには第3.2表の場合Iが成立しなければならない。従って

$$\left\{ \begin{array}{l} \{g_1(p)\}_{p=0} \neq 0 \\ \left\{ \frac{g_2(p)}{p^2} \right\}_{p=0} = \text{有限値} \neq 0 \\ \{u_1(p)\}_{p=0}, \{u_2(p)\}_{p=0} \neq 0 \end{array} \right. \quad (3.1.34)$$

$g(p)$ の最高次の係数を g_n とし最低次(定数項)の係数を g_0 とする。又 $h(p)$ の最高次、最低次の係数を h_n, h_0 と表わす。基本関係式から直ちに $g_n = \pm h_n, g_0 = \mp h_0$ でなければならぬ事が分る。従って $g(p)$ の係数は全で正でなければならぬ事から、上述の条件2)と3)は次の新しい条件2')に置換える事が出来る。

2') G' の最高次の係数と最低次の係数(定数項)は互に反対符号を有する。従って定理が証明された。(証明終り)

[系]

定理2に於て条件3)を以下の条件3')に置換しよう。

3') $h(p)$ は次式で表わされる。

$$h(p) = (p^2 - \alpha^2) \cdot h'(p) \quad (3.1.35)$$

但し $\alpha = \text{実数}$

$h' = (N-2)$ 次の偶数次の多項式

然るときこのリアクタンス帯域濾波器は最小線輪数回路として構成する事が出来る。

(証明)

(定理2)の特別の場合として直ちに得られる。

[定理3]

リアクタンス帯域濾波器が次の条件を允しているものとする。

1) 次数 N は奇数である。

2) L だけのカットセット及びタイセットを有しない。

この時しかもこの時にかぎりこの回路は $\frac{N-1}{2}$ 個の線輪を用いて構成出来る。

(証明)

3.1.3 における式 (3.1.25) の n'_R を 1 とする場合には、定理 2 の証明において $Z_S(w)$ 或は $Z_L(w)$ の何れか一方だけが式 (3.1.32) 及び式 (3.1.33) を満足すればよい。今 $Z_S(w)$ について考えると次の条件が必要充分であることがわかる。

1) $f(p)$ が偶多項式ならば第 3.1 表の場合 IV 及び第 3.2 表の場合 I が成立する事。($Z_L(w)$ に対しては第 3.1 表の場合 III, 第 3.2 表の場合 II)

2) $f(p)$ が奇多項式ならば第 3.1 表の場合 IV 及び第 3.2 表の場合 I が成立する事。($Z_L(w)$ に対しては第 3.1 表の場合 III, 第 3.2 表の場合 II)

何れの場合も N が奇数である事から導かれるものである。従って N が奇数ならば $n'_R = 1$ となり、 L だけのカットセット及びタイセットが存在しなければ、 $N = 2n_L + n'_R$ 即ち $n_L = \frac{N-1}{2}$ を得る。尚条件 1) の代りに「特性関数が奇数個の実零点をもつ」としてもよい。(証明終り)

以上述べた様に、リアクタンس帯域回路に於ては線輪の個数は次数 N に対して $\left[\frac{N-1}{2} \right]$ とする事が出来る。更にこれ以下の個数の線輪を用いて N を実現する事はリアクタンس回路に於ては不可能な事である。即ち最小線輪数回路となっているのである。敢えて線輪数を減少させるためには適当に抵抗を導入した LCR 回路網としなければならない。

定理 2, 定理 3 に於ける「 L だけからなるカットセット及びタイセットを含まない」と言う条件を充すために如何に回路を構成すべきかと言う問題については第 3 章第 3.3 節に於て詳細に述べる。又 p 平面の実軸上に零点を有する特性関数を得る問題は既に第 2 章第 2.2 節に於て詳細に述べたものである。

3.1.5 第3.1節の結論

本節に於ては先ず一般のLCR回路網の自由度と構成素子数との関係を回路網トポロジ-の立場から基礎的に考察し、回路網が最小線輪数回路であるための必要且充分条件を導いた。

これを実用上最も重要な濾波器構成論に適用してリアクタンス帯域濾波器が最小線輪数回路で実現されるための条件を求めた。この条件と第2章に於て述べられた定理とから最小線輪数回路の濾波器、即ち次数 N に対して、 $\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor$ の整数部に等しい個数の線輪を有する濾波器が実現出来るのである。第2章の設計例において示した様に従来はこの様な濾波器の設計は不可能であった。

回路の小形化経済性が非常に重要となって来たが、線輪は Q の点、型、価格、安定度、製造工数、等の点からリアクタンス素子として最も問題が多いので、これを1個でも減少させることは通信技術、製造技術上極めて重要である。本節はその基礎的指針を与えたものである。又本節はLCR回路として取扱っており、将来受動又は能動LCR回路を取扱う際にも有効である。

第3.2節 リアクタンス帯域濾波器梯子回路の実現充分条件

3.2.1 基礎的必要条件

先ずリアクタンス四端子網が梯子回路構成の帯域濾波器として実現出来るための基礎となる必要条件について述べよう。

さてリアクタンス四端子網が電源と負荷の間に挿入されたとき、伝達係数 $S(p)$ 、特性関数 $\varphi(p)$ が定義され、 $S(p)$ と $\varphi(p)$ からこの四端子網の縦続マトリックスの要素関数は本章第3.1節 3.1.4 式(3.1.28)～式(3.1.30)に示す通りである。それらの公式からわかる様に同一の $S(p)$ 及び $\varphi(p)$ から多くの相異なる縦続マトリックス \mathbf{L} が導かれるが、そのうち少なくとも1つの \mathbf{L} が実際の回路として構成され得たならば $S(p)$ 或は $\varphi(p)$ は物理的に実現されたと言う。

さて式(3.1.28)によって表わされる縦続マトリックス

$$\mathbf{L} = \frac{1}{f(p)} \begin{bmatrix} a(p) & b(p) \\ c(p) & d(p) \end{bmatrix}$$

に於ける各要素関数 $a(p)$, $b(p)$, $c(p)$ 及び $d(p)$ のいずれかと $f(p)$ との間に原点を除く有限周波数の共通根があるときマトリックス \mathbf{L} は特異であるとし、共通根がなければ特異でないと言う事とする。^{*}

すでに述べたように(3.1.31)式が成立して

$$a(p) \cdot d(p) - b(p) \cdot c(p) = f^2(p)$$

となるから、 \mathbf{L} が特異ならば、 $f(p)$ と共通根を有する要素関数は必ず2個以上存在するが、 $a(p)$ と $d(p)$ 若しくは $b(p)$ と $c(p)$ のみが共通根をもつこ

※数学的には $\det(\mathbf{L}) \equiv 1$ であり 常に \mathbf{L}^{-1} は存在するから、本文に定める特異な \mathbf{L} においても \mathbf{L}^{-1} は勿論存在する。即ち行列論に於ける特異マトリックスと意味が異っている事に注意しておく。

とはないのである。又 $f(p)$ と式 (3.1.27) に於ける $g(p)$, $h(p)$ は既約であったから、それらの関数から導かれる $a(p)$, $b(p)$, $d(p)$ に於ても $(a-b+c-d)$ 及び $(a+b+c+d)$ は $f(p)$ と既約である。従って全ての要素関数の共通根は存在しない。

さて、マトリックス L によって送電端或は受電端からみた開放アドミッタンス Y_{1f} , Y_{2f} 及び短絡インピーダンス Z_{1s} , Z_{2s} を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} Y_{1f} &= \frac{c(p)}{a(p)} ; \text{受電端開放送電端からみたアドミッタンス} \\ Y_{2f} &= \frac{c(p)}{d(p)} ; \text{送電端開放受電端からみたアドミッタンス} \\ Z_{1s} &= \frac{b(p)}{d(p)} ; \text{受電端短絡送電端からみたインピーダンス} \\ Z_{2s} &= \frac{b(p)}{a(p)} ; \text{送電端短絡受電端からみたインピーダンス} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.1)$$

マトリックス L が特異ならば Y_{1f} , Y_{2f} , Z_{1s} , Z_{2s} のうち既約でないものが存在する。回路網の次数(自由度)はマトリックス L の要素関数の最高次数に等しい。今要素関数 a, b, c, d のうち最高次数のものを含み開放アドミッタンス或は短絡インピーダンスを回路の次数を有するものとする。

回路構成にあたっては、 Y_{1f} , Y_{2f} , Z_{1s} , Z_{2s} のうち回路の次数を有するものが重要である。又 Y_{1f} , Y_{2f} の区別が必要ない場合には単に Y_f と表わし Z_{1s} , Z_{2s} についても単に Z_s と表わす場合がある。

以下の議論の対象を帯域濾波梯子回路に限定する。

本節に於て扱う帯域濾波器とは次の如きものとする。正の実周波数を ω の領域に分け $(0, \omega_{-1})$ を下部阻止域, (ω_{-1}, ω_1) を通過域, (ω_1, ∞) を上部阻止域と名付けるとき* 次の条件を満足するものである事。

- i) 下部阻止域及び上部阻止域にはそれぞれ1個以上の減衰極を有し、減衰零点を有しない。
- ii) 通過域には1個以上の減衰零点を有し減衰極を有しない。

*各領域の境界点 ω_{-1} および ω_1 は通過域にも阻止域にも属しない点、即ち数論における Dedkind の意味の切断点である。又 $0, \infty$ はそれぞれ下部、上部阻止域に所属するものとする。

さてこの帯域濾波梯子リアクタンス回路の構成に関する基礎的な必要条件を次の定理としてまとめておく。

(定理 4)

リアクタンス帯域濾波器が正素子梯子回路で実現出来るためには次の条件が必要である。

- (1) 減衰極は全て実周波数軸上に存在すること。
- (2) 原点及び無限遠点には少くとも1個の減衰極が存在すること。
- (3) 原点及び無限遠点に存在する減衰極の数を夫々 n 。及び n_{∞} とし、上部阻止域及び下部阻止域の有限周波数領域に存在する減衰極の数を m_h 、及び m_l とするとき、式(3.2.1)で定義された Y_f 、 Z_s のうち回路の次数を有するものの正の実周波数零点 ($0, \infty$ を含む) の総数は

$$n + l = 1 \quad (3.2.2)$$

に等しい。但し

$$\left. \begin{aligned} n &= m_h + \left[\frac{n_{\infty}}{2} \right] + 1 \\ l &= m_l + \left[\frac{n_0}{2} \right] + 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.3)$$

但し $[]$ は整数部分を意味するものとする。

このとき Z_s 、 Y_f の有限領域に於ける零点とはその分子多項式 $b(p)$ 、 $c(p)$ の零点を数えるものとする。

[証 明]

条件(1)は明白であるから、まず条件(2)から考察する。今無限遠点に減衰極がないものとするれば、 $f(p)$ の次数は回路の次数 N に等しくなければならない。(i)。従って第3.1表の場合0或は場合Vのいずれかが成立しなければならない。 $f(p)$ が $2n$ 次ならば場合0に相当し

$$Z_s = \frac{(2n-1) \text{ 次}}{2n \text{ 次}} \quad Y_f = \frac{(2n-1) \text{ 次}}{2n \text{ 次}}$$

となることが導かれる。又 $f(p)$ が $(2n+1)$ 次ならば場合Vが成立し

$$Z_s = \frac{2n \text{ 次}}{(2n+1) \text{ 次}}$$

$$Y_f = \frac{2n \text{ 次}}{(2n+1) \text{ 次}}$$

とならねばならない。いずれも $p \rightarrow j\infty$ に於て $Z_s, Y_f \rightarrow 0$ となり、結局無限大周波数で直列脱短絡、並列脱開放すなわち無限遠点が減衰零点となる。これは帯域濾波器ではない。

次に原点に減衰極がないものとする。従って $f(0) \neq 0$ であるから第3.2表の場合0とならねばならない。即ち $a(p)$ 及び $d(p)$ は共に原点に零点をもたない。又 $c(p)$ 及び $b(p)$ は原点に1重の零点を有するから $\omega \rightarrow 0$ に於て Z_s, Y_f 共に零となる。この事は原点が減衰零点となる事を意味し帯域濾波器ではない。

以上の議論から帯域濾波器の縦続マトリックス L の各要素関数の次数関係及び原点における零点の多重度の関係は第3.1表・場合I乃至IV・及び第3.2表・場合I及びII・のいずれかに限られるのである。表3.1 表3.2及び $a(p), b(p), c(p), d(p)$ と $g_1(p), g_2(p), pu_1(p), pu_2(p)$ との関係を示す式(3.1.29)から、 Z_s, Y_f のうち回路の次数を有するものの正の実周波数零点(0, ∞ を含む)の数と減衰極の数の関係を調べると容易に第3.3表を得る。

第3.3表 回路次数と Z_s, Y_f の零点の数の関係

場合	回路次数	$f(p)$ の次数	n_0	n_∞	$m_h + m_l$	$h+l$	Z_s 或は Y_f の次数	Z_s, Y_f の有限零点数	Z_s, Y_f の ∞ 点の零点数	Z_s, Y_f の零点の総数	備考
I	$2n$	$2m$	$2m'$	$2(n+m)$	$m-m'$	$n+2$	$\frac{(2n-1) \text{ 次}}{(2n) \text{ 次}}$	n (原点を含む)	1	$n+1$	$m' \geq 1$ $n \geq m+1$
II	$2n$	$2m+1$	$2m'+1$	$2(n-m)-1$	$m-m'$	$n+1$	$\frac{(2n) \text{ 次}}{(2n-1) \text{ 次}}$	n	なし	n	$m' \geq 0$ $n \geq m+1$
III	$2n+1$	$2m$	$2m'$	$2(n-m)+1$	$m-m'$	$n+2$	$\frac{(2n+1) \text{ 次}}{(2n) \text{ 次}}$	$n+1$ (原点を含む)	なし	$n+1$	$m' \geq 1$ $n \geq m$
IV	$2n+1$	$2m+1$	$2m'+1$	$2(n-m)$	$m-m'$	$n+2$	$\frac{(2n) \text{ 次}}{(2n+1) \text{ 次}}$	n	1	$n+1$	$m' \geq 0$ $n \geq m+1$

第3.3表から $h+l = m_h + m_l + \left[\frac{n_0}{2} \right] + 1 + \left[\frac{n_\infty}{2} \right] + 1$ を求め、次に Z_s 或は Y_f のうち回路の次数を有するものの正の実周波数零点(原点, 無限

遠点を含む)の総数を求めれば、それは式(3.2.2)で表わされる事がわかる。
 $f(p)$, Z_S , Y_f 等次数関係は第3.3表以外にあり得ないから、結局必要条件(3)が証明された。(証明終り)

定理4で定義された ρ 及び λ は本章に於て重要なものであり、以下 ρ を上部阻止域に属する減衰極の数とし λ を下部阻止域に属する減衰極の数とする。然るとき式(3.2.2)は次の様に表わされる。

$$(\text{Z}_S \text{ 或は } Y_f \text{ の零点の数}) = (\text{上部阻止域の減衰極の数}) + (\text{下部阻止域の減衰極の数}) - 1$$

3.2.2 帯域濾波梯子回路の実現充分条件⁽³⁹⁾⁽⁴¹⁾⁽⁴⁵⁾

3.2.1 の定理4に示した条件は基礎的な必要条件であってこれを充すリアクタンス四端子網を梯子回路で構成する際、しばしば理想変圧器を必要としたり構成素子に負値のもの(理想変圧器を含めない)が生じたりする。さて実現される四端子網に縦続接続される理想変圧器は元来終端(負荷)抵抗を変更する事によって解決されるもので本質的なものではない。実際にも帯域濾波器の通過域では理想変圧器とみなし得る変圧器の製作は困難な事ではないし、周知の理想変圧器変換(Norton's transformation)によって実現する事も可能である。即ち帯域濾波器の動作減衰量を実現するリアクタンス四端子網の構成にあたっては縦続接続理想変圧器を許す外は構成素子に負値のものを生じない実現条件を知る事が重要であった。本節においてはその様な実現条件を求め構成法を述べる。

【定理5】

リアクタンス帯域濾波回路網において正の実周波数軸上(原点及び無限遠点を含む)の減衰極を次の如く大きさの順に並べて番号をつける。

$$0 = \alpha_{-l} \leq \alpha_{-(l-1)} \leq \dots \leq \alpha_{-1} < \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{(h-1)} \leq \alpha_h - \infty \quad (3.2.4)$$

次に式(3.2.1)で定義される Y_f , Z_S のうち回路の次数をもつものの正の実周波数零点を大きさの順に並べて

$$P_{-(l-1)} \leq P_{-(l-2)} \leq \dots \leq P_1 < P_0 < P_1 \leq \dots \leq P_{h-2} \leq P_{h-1} \quad (3.2.5)$$

とする。但し n 重根は n 個と数える。

このとき条件

$$\left. \begin{array}{ll} P_k \leq Q_k & k = 1, 2, \dots, (h-1) \\ P_{k'} \geq Q_{-k'} & k' = 1, 2, \dots, (l-1) \end{array} \right\} \quad (3.2.6)$$

を充す Y_f 又は Z_g があれば、このリアクタンス帯域波回路網は 1 個の理想変圧器を除いて負素子を含まない梯子回路で実現出来る。

(証明)

今 $Z_{12} = b(p)/d(p)$ の次数が回路の次数に等しく且条件 (3.2.6) を充している場合について十分性を証明する。 Z_{23} の次数が回路の次数に等しく条件 (3.2.6) を充している場合には縦続マトリックス \mathbf{L} の代りに \mathbf{L}^{-1} について同様な議論をすればよい。又 Y_f については \mathbf{L} の代りに \mathbf{L} の双対変換マトリックス (a と d 及び b と c をとり換えたマトリックス) について論ずればよいのである。

分解 (1) $\lim_{p \rightarrow j\infty} \frac{b(p)}{d(p)} = 0$ の場合 ;

この場合には条件 (3.2.6) より $p = j\infty$ に於て少なくとも 2 個の減衰極が存在するから、 $d(p)$ を ν 次多項式とすれば $b(p)$, $f(p)$ の次数は次の通りとなる。

$$\left\{ \begin{array}{ll} b(p) : & (\nu-1) \text{ 次多項式} \\ f(p) : & (\nu-2) \text{ 次或はそれ以下の次数の多項式} \end{array} \right.$$

従って基本関係式 (3.1.31) から $a(p)$, $c(p)$ の次数は

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(p) : & (\nu-2) \text{ 次或はそれ以下} \\ c(p) : & (\nu-1) \text{ 次或はそれ以下} \end{array} \right.$$

となっていなければならない。又明に $d(p)/b(p)$ 及び $c(p)/a(p)$ の無限遠点における留数は正で相等しくなければならない。従って次式が成立する。

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{d(p)}{p \cdot b(p)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{c(p)}{p \cdot a(p)} = C > 0 \quad (3.2.7)$$

このときマトリックス L は次の様に分解される。(カ2.3図参照)

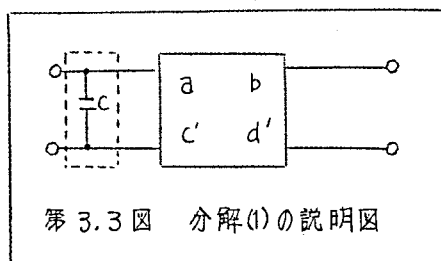
$$L = \frac{1}{f(p)} \begin{bmatrix} a(p) & b(p) \\ c(p) & d(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c \cdot p & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{f(p)} \begin{bmatrix} a(p) & b(p) \\ c'(p) & d'(p) \end{bmatrix} \quad (3.2.8)$$

$$\text{但し } c'(p) = c(p) - c \cdot p a(p)$$

$$d'(p) = d(p) - c \cdot p b(p)$$

$c'(p)$ 、 $d'(p)$ はそれぞれ次数 2 次低下しており従って無限遠点における減衰極は式 (3.2.8) の右辺の残留マトリックスに対しては取除かれている。

$b(p)$ は不変であるから式 (3.2.8) 右辺の残留マトリックスに対しても条件 (3.2.6) が成立している。



第 3.3 図 分解(1)の説明図

分解 (2) $\lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{b(p)}{d(p)} \right) = 0$ の場合 ;

条件 (3.2.6) から原点に少なくとも 2 個の減衰極が存在する。従って $d(0) \neq 0$ とすれば原点における零点の多重度は次の様でなければならない。

$b(p)$; 原点に 1 重の零点

$f(p)$; 原点に 2 重の零点

$a(p)$; 原点に 2 重の零点

$c(p)$; 原点に 1 重の零点

又 $d(p)$ が原点に於て 1 重の零点を有する場合には

$b(p)$; 原点に 2 重の零点

$f(p)$; 原点に 2 重の零点

$a(p)$; 原点に 1 重の零点

$c(p)$; 原点に零点を有しない。

となっている。いずれの場合に於ても基本関係式 (3.2.6) から

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{d(p)}{b(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{c(p)}{a(p)} = l_0^{-1} > 0 \quad (3.2.9)$$

が成立する。従ってマトリックス L は次の様に分解される。(オ3.4図参照)

$$L = \frac{1}{p^2 f(p)} \begin{bmatrix} a(p) & b(p) \\ c(p) & d(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_0^{-1} p^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{p f(p)} \begin{bmatrix} a'(p) & b'(p) \\ c'(p) & d'(p) \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

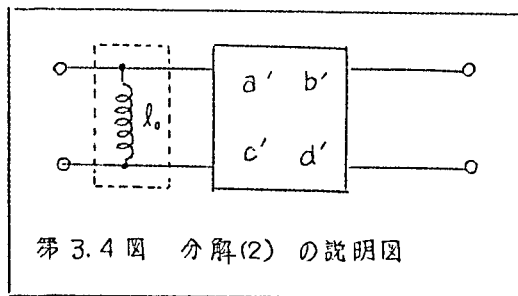
$$\text{但し} \quad a'(p) = \frac{a(p)}{p}, \quad b'(p) = \frac{b(p)}{p}$$

$$c'(p) = \frac{1}{p} \left\{ c(p) - l_0^{-1} \cdot \frac{a(p)}{p} \right\}$$

$$d'(p) = \frac{1}{p} \left\{ d(p) - l_0^{-1} \cdot \frac{b(p)}{p} \right\}$$

式 (3.2.10) の右辺の残留マトリックスにおいては原点の減衰極が1個取除かれ、且 $b(p)$ の原点における零点も1個取除かれているが他の零点は不変である。従って残留マトリックスに対しても条件 (3.2.6) が成立している。

さて Z_{15} に対して可能なかぎり上述の (1) 及び (2) のマトリックス分解を実行すれば、必ず $p \rightarrow j\infty$ 及び $p \rightarrow 0$ に対して $Z_{15} = \frac{b(p)}{d(p)}$ を共に無限大とする事が出来る。この場合のマトリックス分解を次に論じよう。



第 3.4 図 分解 (2) の説明図

先ずマトリックス L は [3.2.1] で定めた意味において特異でないものとしよう。

分解 (3) $\frac{b(p)}{d(p)}$ の零点を減衰極と一致させる事 ;

先ず $\frac{b(p)}{d(p)}$ の零点を適当に移動して上部阻止域に属する減衰極 Q_k に一致させる事を考えよう。 n 個の上部阻止域減衰極に相当する点 $p = j\Omega_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$, 無限遠点を含み且重複を許す) のうち 関数 $\left\{ \frac{1}{p} \cdot \frac{b(p)}{d(p)} \right\}$ を正の最小値とする点 $p = j\Omega_k$ を求め、且そのとき得られる正の最小値を l_1 と

しよう。即ち l_1 及び Q_k は次式によって求められる。

$$l_1 = \min \left[\frac{1}{p} \cdot \frac{b(p)}{d(p)} \right]_{p=Q_k} > 0 \quad (k=1, 2, \dots, n \text{ に対して}) \quad (3.2.11)$$

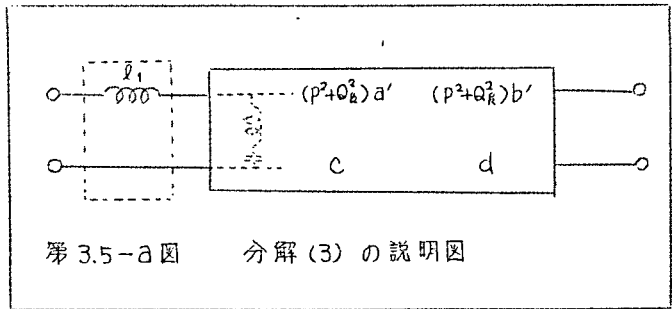
l_1 によってマトリックス L を次の如く分解する。(第3.5-a図参照)

$$L = \frac{1}{f(p)} \begin{bmatrix} a(p) & b(p) \\ c(p) & d(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l_1 \cdot p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{f(p)} \begin{bmatrix} (p^2 + Q_k^2) a'(p) & (p^2 + Q_k^2) b'(p) \\ c(p) & d(p) \end{bmatrix} \quad (3.2.12)$$

$$\text{但し} \quad a(p) - l_1 \cdot p \cdot c(p) = (p^2 + Q_k^2) a'(p)$$

$$b(p) - l_1 \cdot p \cdot d(p) = (p^2 + Q_k^2) b'(p)$$

式(3.2.12)の右辺の残留マトリックスの第1行の要素関数は共に $(p^2 + Q_k^2)$ なる因数を共有している。式(3.2.12)



の残留マトリックス

の要素関数 $\{b(p) - l_1 \cdot p \cdot d(p)\}$ の零点は l_1 の連続関数であって l_1 が零から正の値に増大すれば、零点も増大する。このとき $\{b - l_1 \cdot p \cdot d\}$ の零点が条件(3.2.6)を充している如き l_1 の範囲は明かに $[0 \sim (\text{式}(3.2.11) \text{ で定まる } l_1 \text{ の値})]$ である。従って残留マトリックスについても条件(3.2.6)は成立しているのである。

次に $\frac{b(p)}{d(p)}$ の零点を下部阻止域の減衰極と一致させよう。それには直列キマパシテイ C_1 と一致させるべき下部阻止域減衰極 $Q_{-k'}$ を次式で求めればよい。

$$C_1^{-1} = \min \left[p \cdot \frac{b(p)}{d(p)} \right]_{p=Q_{k'}} > 0 \quad (k' = 1, 2, \dots, l) \quad (3.2.13)$$

C_1^{-1} によってマトリックス L を次の如く分解する。(第3.5-b図参照)

$$L = \frac{1}{f(p)} \begin{bmatrix} a(p) & b(p) \\ c(p) & d(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & C_1^{-1} \cdot p^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{f(p)} \begin{bmatrix} (p^2 + Q_{k'}^2) a'(p) & (p^2 + Q_{k'}^2) b'(p) \\ c(p) & d(p) \end{bmatrix} \quad (3.2.14)$$

但し

$$a(p) - \frac{c_1^{-1} \cdot c(p)}{p} = (p^2 + Q_k^2) \cdot a'(p)$$

$$b(p) - \frac{c_1^{-1} \cdot d(p)}{p} = (p^2 + Q_k^2) \cdot b'(p)$$

式(3.2.12)の場合と全く同様に式(3.2.14)の右辺の残留マトリックスについても条件(3.2.6)が成立しているのである。

又 $Z_s = \frac{b(p)}{d(p)}$ の零点のうちの適当な2個を同時に2つの減衰極に夫々一致させる事も常に可能である。それには先ず、式(3.2.11)によって l_1 及び Q_k (あるいは(3.2.13)により c_1^{-1} 及び $Q_{-k'}$) を求めそれによって抽出すべき直列インピーダンスを定めるのである。(サ3.6図参照)

$$L = \frac{1}{f(p)} \begin{bmatrix} a(p) & b(p) \\ c(p) & d(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l \cdot \frac{p^2 + \alpha^2}{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{f(p)} \begin{bmatrix} a'(p) & b'(p) \\ c(p) & d(p) \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但し } a'(p) &= a(p) - l(p^2 + \alpha^2) \cdot \frac{c(p)}{p} \\ b'(p) &= b(p) - l(p^2 + \alpha^2) \cdot \frac{d(p)}{p} \end{aligned} \right\} \begin{matrix} (3.2, \\ 15) \end{matrix}$$

$$l = l_1 + l_2$$

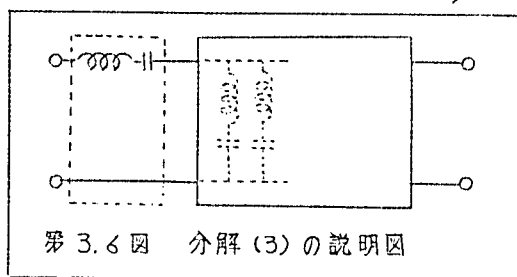
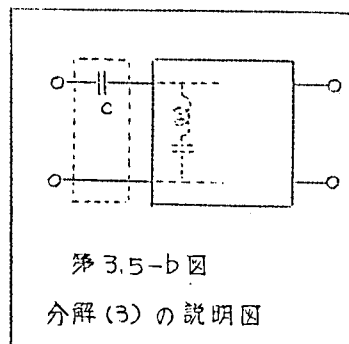
$$\alpha^2 = \frac{l_2}{l_1 + l_2} \cdot Q_k^2$$

$$l_1 = \min \left[\frac{1}{p} \cdot \frac{b(p)}{d(p)} \right]_{p=jQ_k} > 0 \quad (k=1, 2, \dots, h) \quad \left. \begin{matrix} (3.2, \\ 16) \end{matrix} \right\}$$

$$l_2 = \min \left[\frac{b(p) - l_1 \cdot p d(p)}{(p^2 + Q_k^2)} \cdot \frac{p}{d(p)} \right]_{p=jQ_v} > 0$$

$$(v = -h, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, h \text{ 但し } v \neq k)$$

式(3.2.15)の右辺の残留マトリックスについて条件(3.2.6)が成立している事は容易に確かめる。



分解 (4) 有限周波数領域の減衰極を分離する事 ;

特異でないマトリックス L に分解 (3) を適用して得られた残留マトリックスにおいては, $a(p)$, $b(p)$ と $f(p)$ の間に共通因子 $(p^2 + Q_k^2)$ 或は $(p^2 + Q_{-k}^2)$ がある。但し Q_k^2 , Q_{-k}^2 は有限 ($0, \infty$ でない) 周波数の減衰極である。仮定により同じ列に属する要素間数には共通根はないから残留マトリックスは次の様に表示される。

$$\frac{1}{f(p)} \begin{bmatrix} a(p) & b(p) \\ c(p) & d(p) \end{bmatrix} = \frac{1}{(p^2 + Q_k^2) f'(p)} \begin{bmatrix} (p^2 + Q_k^2) \cdot a'(p) & (p^2 + Q_k^2) \cdot b'(p) \\ c(p) & d(p) \end{bmatrix} \quad (3.2.17)$$

但し $f'(jQ_k)$, $a'(jQ_k)$, $b'(jQ_k)$, $c(jQ_k)$, $d(jQ_k) \neq 0$

従って基本関係式 (3.1.31) から式 (3.2.17) において $\frac{d(p)}{b(p)}$, $\frac{c(p)}{a(p)}$ の $\pm jQ_k$ における留数は正で相等しい。即ち次式が成立する。

$$\lim_{p \rightarrow jQ_k} \frac{p^2 + Q_k^2}{p} \cdot \frac{d(p)}{b(p)} = \lim_{p \rightarrow jQ_k} \frac{p^2 + Q_k^2}{p} \cdot \frac{c(p)}{a(p)} = l^{-1} \quad (3.2.18)$$

このときマトリックス (3.2.17) は次の様に分解され得る。(参 3.7 図参照)

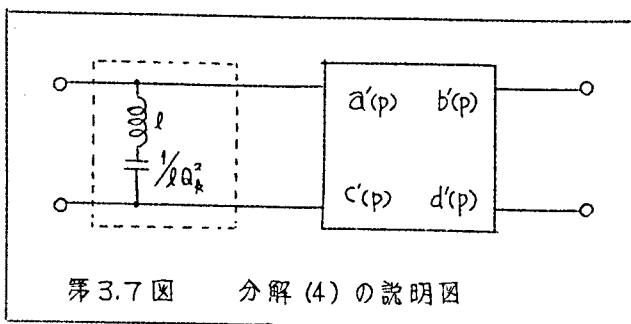
$$L = \frac{1}{f(p)} \begin{bmatrix} a(p) & b(p) \\ c(p) & d(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l^{-1}p}{p^2 + Q_k^2} & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{f'(p)} \begin{bmatrix} a'(p) & b'(p) \\ c'(p) & d'(p) \end{bmatrix} \quad (3.2.19)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但し} \quad c'(p) &= \frac{c(p) - l^{-1}p \cdot a'(p)}{p^2 + Q_k^2} \\ d'(p) &= \frac{d(p) - l^{-1}p \cdot b'(p)}{p^2 + Q_k^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.20)$$

式 (3.2.19) の右辺の残留マトリックスについては, $\pm jQ_k$ に存在する減衰極および $b(p)$ の零点 1 個が取除かれる。 $b'(p)$ は (3.2.12) 式における $b'(p)$ と同一であるから条件 (3.2.6) は依然として成立している。

残留マトリックスの第 1 行 $a(p)$, $b(p)$ と $f(p)$ に共通根がまだ存在するならば上述の分解を繰返し適用し共通根がなくなるまで続けるものとする。このとき $b'(p)$ の零点は共通根が取除かれる以外は全く不変であるから条件 (3.

2.6) は損われることはない。



以上述べた様に縦続マトリックスの分解を遂行するためには、先ず必要に応じて“分解(1)”或は“分解(2)”を適用することにより

$$\lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ p \rightarrow \infty}} \left(\frac{b(p)}{d(p)} \right) = \infty \quad \text{ならしめた後“分解(3)”を適用する。}$$

“分解(3)”の(3.2.11)式或は(3.2.13)式又場合によっては(3.2.16)式によって分離すべき減衰極 θ_v が決定される。

θ_v が零でない有限値ならば“分解(4)”によって分離され残留マトリックスの要素関数は全て次数が2次低下したものとなる。

又 θ_v が零ならば“分解(3)”によってマトリックスの要素関数の全ては1次低下し且 $\lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{b(p)}{d(p)} \right) = 0$ となり“分解(2)”によって更に原点に存在する減衰極が1個分離され要素関数の次数は1次低下する。

θ_v が無限大ならば“分解(3)”によって第1行の要素関数 $a(p)$, $b(p)$ が2次低下し、“分解(1)”の場合に帰着する。従って“分解(1)”によって第2行の要素関数の次数が2次低下する。

この様に分解の過程が進むにつれて全ての要素関数の次数は2次ずつ確実に低下して行く。仮定により Z_{1S} が回路の次数を有し、且 $\lim_{p \rightarrow \infty} Z_{1S} = \infty$ であることから $b(p)$ が最高次数を有し $c(p)$ が最低次であることが分る。従って分解が進めば遂には $c(p) = 0$ となり直列腕インピーダンスのみが残される。このとき

$$\frac{a(p)}{f(p)}, \frac{d(p)}{f(p)} \quad \text{はもはや定数であり、直列腕インピーダンス } \frac{b(p)}{d(p)} \text{ を分離すれば}$$

最後に残される残留マトリックスは0次マトリックス $\begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi^{-1} \end{bmatrix}$ である。(但し

ϕ は定数) これは理想変圧器を表わし 負荷抵抗を $\phi^2 r$ と変更したり、周知

の理想変圧器変換によって構成回路に組入れたり，又実際に使用帯域内で理想に近い変成器を継続接続して実現することが出来る。

次に“分解(1)及び(2)”を適用した後マトリックス \mathbf{L} が特異である場合について考える。先ず第1行 $a(p)$ ， $b(p)$ のみが $f(p)$ と共通根を有する場合には“分解(4)”を適用する。このとき(3.2.18)(3.2.19)によって特異性が除かれる。次に第2行 $c(p)$ ， $d(p)$ のみが $f(p)$ と共通根を有する場合には“分解(3)”及び“分解(4)”を適用することによって特異性は除かれる。

さて第2列 $b(p)$ ， $d(p)$ が共通因子 $(p^2 + Q_R^2)$ を有していれば $Z_{15} = \frac{b(p)}{d(p)}$ は既約形ではない。これは回路網が1種の縮退^(注)したものと考えられる。このとき通過域内の任意の1点 ω ($\omega_{-1} < \omega_0 < \omega_1$) をとり新しいマトリックス \mathbf{L}' を次式で定める。

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \frac{p^2 + \omega_0^2}{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.21)$$

即ち

$$\mathbf{L}' = \frac{1}{f(p)} \begin{bmatrix} a(p) & b(p) \\ c(p) & d(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \frac{p^2 + \omega_0^2}{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{pf(p)} \begin{bmatrix} pa(p) & pb(p) + \varepsilon(p^2 + \omega_0^2)a(p) \\ pc(p) & pd(p) + \varepsilon(p^2 + \omega_0^2)c(p) \end{bmatrix} \quad (3.2.22)$$

仮定により $b(p)$ が $a(p)$ より次数が大きく，且両者の零点は互に隔てあっている。従って新しい関数 $\{pb(p) + \varepsilon(p^2 + \omega_0^2)a(p)\}$ の零点は ε の連続関数であり，下部阻止域に存在する零点は ε の増大と共に増大し，上部阻止域に存在する零点は ε の増大と共に減少する。

マトリックス \mathbf{L} が条件(3.2.6)を充てしていれば新しいマトリックス \mathbf{L}' についても $\omega_{-1} < \omega_0 < \omega_1$ である限り $\varepsilon > 0$ に対して条件(3.2.6)を成立せしめる事が出来る。 \mathbf{L} の第2列 $b(p)$ ， $d(p)$ が共通根を有していても \mathbf{L}' は共通根を有していない。従って \mathbf{L} の代りに \mathbf{L}' を考察し“分解(3)”以下の手続きを適用して行けばよい。 ε は最終直列腕以外に含まれないから \mathbf{L}' の分解後 $\varepsilon \rightarrow 0$ として \mathbf{L} の回路構成を得る事が出来る。 \mathbf{L} の回路構成は第3.8図

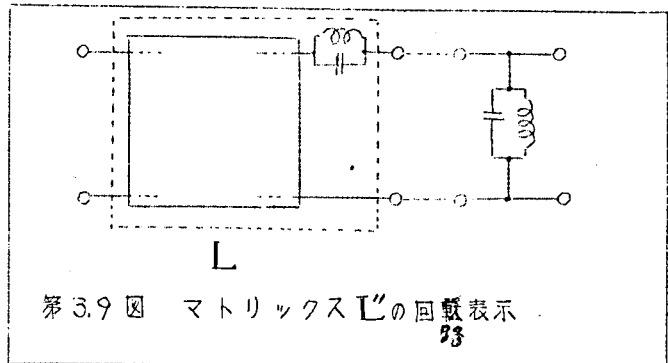
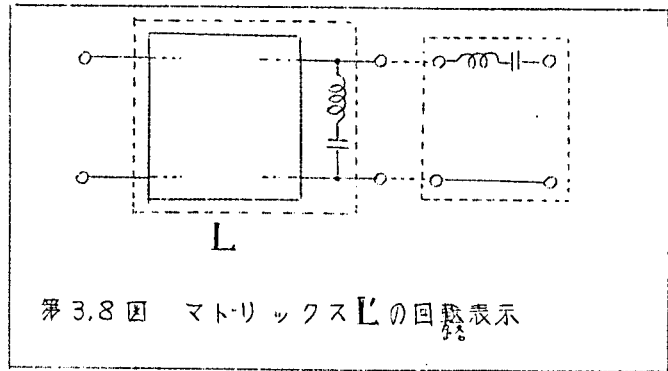
(注) (3.2.21)で定まる \mathbf{L}' と \mathbf{L} の各対応する要素関数の次数は全く同一である。

即ち \mathbf{L} は次数関係から見れば直列端(下端)であり，特に終端側の直列インピーダンスが零となったものと考えらるべきである。この意味から縮退型と名付ける。

に示す様に負荷側に直列共振アドミッタンス腕を有する回路となっており、映像パラメーター理論による誘導 m 半区間終端の場合に相当している。

又第1列 $a(p)$, $c(p)$ が有限の共通根をもつときも同様に縮退型と考えられ、前と同様に ε , w を定めて新しいマトリックス L'' を考察する。

(ϕ 3.9 図 参照)



$$L' = L \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon \cdot \frac{p^2 + w_0^2}{p} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.23)$$

L' の次数関係は L と同一であり、次数の最も高い要素関数は第1列にあり、 Y_{11} が回路の次数を有する場合に外ならない。これは今まで述べた方法の双対交換によって構成出来るのである。(証明終り)

さて以上述べた様に定理 5 を充している継続マトリックス L は必ず梯子形回路として実現出来るのである。定理 5 は充分条件であったが、条件 (3.2.6) が少なくとも1個の Q_k ($k = -(l-1), \dots, (l-1)$) について成立する事は、リアクタンス梯子回路構成のための必要条件である。即ちリアクタンス梯子回路構成を実現するためには、条件 (3.2.6) を充す Q_k が少なくとも1個は存在しなければならない。かかる減衰極 Q_k を上述の分解過程によって分離した後のマトリックスについても同様に、条件 (3.2.6) を充す Q_k が存在しなければならないのである。

この事から定理 5 に示された充分条件が充されていない場合の構成法が得られ

る。それには先ず上部阻止域（又は下部阻止域）に属する減衰極の内，条件（3.2.6）を充す減衰極を全て前述の過程によって分離し，もはや条件（3.2.6）を充す上部阻止域（又は下部阻止域）の減衰極が存在しなくなれば，次に逆の側の阻止域即ち下部阻止域（又は上部阻止域）に属する減衰極を分離する。このとき下部（上部）阻止域の減衰極の少くも1個は条件（3.2.6）を充している筈である。（必要条件）かくして順次これを繰返して行けば梯子回路が実現出来るのである。このとき構成される回路はあたかも低域濾波器と高域濾波器の縦続接続の如くなっている。

実際の場合多く現われる帯域濾波器は上部或は下部阻止域の何れか一方がより高い減衰量であるが，このとき低い減衰量を与える側の阻止域（条件（3.2.6）の一方が充されている）に属する減衰極を全て分離した後，高い減衰量の阻止域の減衰極を分離すればこれが最も負素子を生じない回路構成となっている。しかし一般に両阻止域の減衰特性の立より傾斜がほぼ等しい場合には上部阻止域と下部阻止域とから交互に定理5の構成に従って減衰極を分離する事が望ましい。定理5が充されている場合にも分離すべき極は阻止域が指定されると一意的に定まるが，いずれの阻止域から極を分離すべきかと言う自由度が常に残されている。例えば $l < k$ なる場合には $(k-l)$ 個だけの上部阻止域の極をどの過程で分離するかによって多くの等価回路が実現出来る。 k 個のもののうち l 個と $(k-l)$ 個の区別をしない場合の順列から求まり

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{k!}{l!(k-l)!} - \frac{\left[\frac{k}{2}\right]!}{\left[\frac{l}{2}\right]!\left[\frac{k-l}{2}\right]!} \right\}$$

となる。但し入出力端子の交換から得られるものを除いてある。

3.2.3 通過域最少反響減衰量 A_e と梯子回路実現性との関係

既に第2章に於て詳細に述べた様に，減衰極の位置が与えられ，与えられた通過域内でチェビシェフ近似特性を示す事を条件とすれば理想伝送量関数並びに一般化特性関数は一義的に決定され，又通過域における最小反響減衰量 A_{edB} を定めると回路パラメーターは完全に決定された。即ち与えられた減衰極を有する通過域チェビシェフ特性濾波回路網は只一つの自由度 A_e をもっている。 A_e は回

路構成の実現性を左右する重要なパラメータである。それに関して次の定理が成立する。

〔定理 6〕

虚軸上にのみ減衰極を有する通過域チエビシエフ特性泸波回路網の通過域の最小反響減衰量を A_e とするとき、有限定数 A_{em} が存在して

$$A_{em} \geq A_e > 0$$

なる A_e を有する泸波回路網は必ずリアクタンس梯子回路で実現出来る。

〔証明〕

与えられた虚軸上の減衰極を有し通過域チエビシエフ特性となる泸波器の特性関数 $\varphi(p)$ は任意定数 H を除いて一義に決定される。即ち

$$\varphi(p) = H \cdot \frac{h(p)}{f(p)} \quad (3.2.24)$$

と表わされる。但し $h(p)$ 、 $f(p)$ は一般化特性関数から一意的に定まったものである。さてリアクタンس四端子網の基本関係式 (2.1.1) より伝達係数 $S(p)$ の零点は $G(p^2)$ の零点のうち右半面に存在するものに等しい。即ち $S(p)$ の零点は次の方程式

$$h(p) = \pm j H^{-1} \cdot f(p) \quad (\operatorname{Re} p < 0) \quad (3.2.25)$$

の根である。通過域チエビシエフ特性帯域泸波器においては $h(p)$ は偶関数でその零点は全て虚軸上の通過域内に存在し $f(p)$ の零点は虚軸上の上部阻止域及び下部阻止域内にのみ存在している。今任意の正数 δ に対して $H^{-1} < \delta$ ならば式 (3.2.25) から求まる $g(p)$ ($S(p)$ の分子多項式) の零点は $h(p)$ の零点の ε -近傍に存在する如き正数 ε が必ずある。従って $H^{-1} < \delta$ に対して虚軸上 $h(p)$ の零点の ε' -近傍に $g(p)$ が純虚数値となる点 ($G(p)$ の零点) が存在する如き正数 ε' は必ずある。従って $\{G(p) + h(p)\}$ の零点は $H^{-1} < \delta$ なる H^{-1} に対して必ず条件 (3.2.6) を満足する。

同様にして低域泸波器の場合に現われる奇関数の $h(p)$ の場合を考えよう。このとき $g(p)$ も奇数多項式であって $H^{-1} < \delta$ なる H^{-1} に対して $h(p)$ の零点と $g(p)$ が虚軸上で純実数値をとる点 ($U(p)$ の零点) との差は ε を越

えない。従って $\{U(p) + h(p)\}$ の零点は $H^{-1} < \delta$ に対して必ず条件 (3.2.6) を充す。何れの場合にもこの $g(p)$, $h(p)$, $f(p)$ からリアクタンス梯子回路網を構成する事が出来るのである。

次に大なる数 N をとり $H^{-1} < N$ ならば $g(p)$ の零点の零点は $f(p)$ の零点の ε -近傍に存在する。従ってこの場合 $U(p)$, $G(p)$ の零点は $f(p)$ の零点 (即ち減衰極) の ε' -近傍に存在しているのである。従って十分大なる N に対して、全ての減衰極が原点及び無限遠点に存在する場合を除いては、条件 (3.2.6) は存在しない。即ちリアクタンス梯子回路網として実現することは不可能である。 $G(p)$ 及び $U(p)$ の零点は (H^{-1}) の連続関数であるから、 $H' \leq H_m^{-1}$ ならば、必ず梯子回路構成が実現可能であり、 $H_m^{-1} < H^{-1}$ では、絶対に梯子回路として構成する事が不可能である様な定数 H_m^{-1} が必ず存在する。

既に述べた様に定数 H は通過域内の最小反響減衰量 A_{edb} によって次式で表わされる。

$$H^2 = C \frac{1}{(10^{A_e/10} - 1)}$$

但し C は $g(p)$ の零と極のみによって定まる定数であり、 H は A_e の単調減少関数であるから定理が導かれる。(証明終り)

定理より $g(p)$ の関数形が決まれば、それに対応する回路網の梯子回路実現性はパラメーター A_e のみに依存している事が分かった。即ち如何なる関数形をもつ $g(p)$ も A_e を小とすれば、リアクタンス梯子回路網として実現出来るのである。逆に与えられた関数形の $g(p)$ に対してはリアクタンス梯子回路網として実現し得る最大の A_{em} が存在する。実用上には関数形は減衰極の配置によって一意的に定まるから、或る減衰極配置に対して A_{em} を知れば、 $A_e < A_{em}$ なる A_e に対して本章の方法を適用すれば安心して回路を実現する事が出来る。

3.2.4 第 3.2 節の結論

本節に於てはリアクタンス帯域濾波器が梯子形回路構成で実現出来るための十分条件を導き、最も負素子の出現し難い構成法を述べた。又特性関数の関数形が与

えられたとき、それが実現出来るための最大の A_e (通過域最小不整合減衰量) が存在する事が証明された。換言すれば如何なる関数形の特性関数でも A_e を小さくすれば必ず実現出来ると言う事が判明した。

本節に於ては結合線輪を用いずに構成出来るための充分条件が求められており、理想変圧器は1個許している。理想変圧器を含まない条件が望ましいわけであるが、帯域濾波器の場合理想変圧器に近い変圧器を作る事が出来、又周知の理想変圧器変換を行う事も可能であって実用上何らの差支えとならない。

本節の理論によって帯域濾波器の構成に広い視野を与え、実用上最も重要な帯域濾波器の設計に極めて有用である。

第3.3節 最小線輪数帯域波 梯子回路の構成理論

3.3.1 帯域波梯子回路が最小線輪(蓄電器)数梯子回路で 構成されるための充分条件

既に第3章第3.1節に於て述べた様に回路網の小型高性能が近年ますます要望され、構成素子の数を減らし特に価格、性能、製造の上から問題の多い線輪の個数を出来るかぎり減少せしめた波導器が望まれる。第3.1節に於ては回路次数(自由度) N に対して線輪の個数を最小ならしめるための条件を定理1に述べ、特にリアクタンス四端子網の場合の最小線輪条件を定理2及び定理3に述べた。

今与えられた縦続マトリックスを実際の回路に実現する際線輪の個数を最も少なくしよう。縦続マトリックスが定理2の条件2), 3) 或は定理3の条件1) を充ていれば、この縦続マトリックスの実現に際し線輪のみからなるカットセット及びタイセットを1個も許さない事に注意すれば、次数 N に対して最小線輪数回路となるが、与えられた縦続マトリックスは必ずしも定理2或は定理3の条件2), 3) 或は条件1) を充ていない場合が多い。そのとき定理1の条件1) 或は定理2の条件2) だけを充す回路構成を得たとすれば、この回路構成は、与えられた縦続マトリックスに対して最小線輪数回路となっていると言えるのである。かかる考察から本節に於ては『与えられた縦続マトリックスがしだけからなるタイセット及びカットセットを有しない回路で実現出来るための充分条件』を求めその構成法を述べる。それは次の定理7及びその証明に詳細に示される。

(定理7)

リアクタンス帯域波回路網において次の2条件の何れかが成立するとき、この回路網は1個の理想変圧器を除いては負素子を含まず、且つ線輪の個数最小の回路構成で実現出来る。

- (i) 無限遠点に少なくとも2個の減衰極を有し且つ Z_{1S} , Z_{2S} のうち回路の次数を有するものの正の実周波数極より

$$p_k \leq q_k < (p_{k+1} + \delta) \quad \delta > 0 \quad (3.3.1)$$

から定まるものをとるとき条件

$$\left. \begin{aligned} p_{-k'} &\geq q_{-k'} & (k' = 1, 2, \dots, (l-1)) \\ q_k &\leq q_k & (k = 1, 2, \dots, (h-2)) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.2)$$

を充すこと。但し $p_{-k'}$, p_k は Z_s の零点とする。

(ii) 原点に少なくとも2個の減衰極を有し、且つ Y_{1f} , Y_{2f} のうち回路の次数を有するものの正の実周波数極より

$$p_{-k'} \geq q_{-k'} > (p_{-(k'+1)} - \delta) \quad \delta > 0 \quad (3.3.3)$$

から定まるものをとるとき条件

$$\left. \begin{aligned} q_{-k'} &\geq q_{-k'} & (k' = 1, 2, \dots, (l-2)) \\ p_k &\leq q_k & (k = 1, 2, \dots, (h-1)) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.4)$$

を充すこと。但し $p_{-k'}$, p_k は Y_f の零点とする。

[証 明]

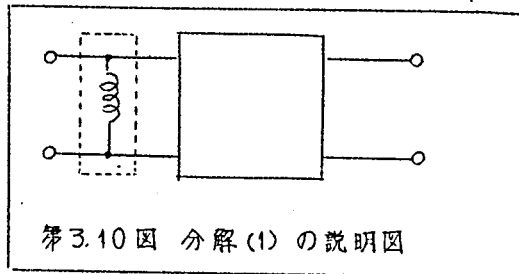
条件 i) が成立するものとすれば、 p を p^{-1} と置き換え、然る後マトリックスの双対変換を施せば条件 ii) が導かれるから、証明は定理5の場合と同じく Z_{1s} が条件 (3.3.2) を充している場合について証明すれば充分である。

分解 (1) $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{b(p)}{d(p)} = 0$ の場合 (注 3.10 参照)

定理5の「分解 (2)」に相当し (3.2.9) によって求まった並列インダクタンス l_0 により (3.2.10) の如く分解される。

さて定理5の場合と全く同様に L が特異である場合と、そ

うでない場合とに分けて考察する。先ず特異でないものとして議論を進めよう。



分解 (2) $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{b(p)}{d(p)} = \infty$ の場合

定理 5 の " 分解 (3) " に於て述べた様に

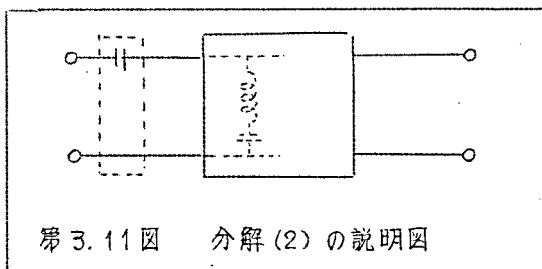
$$C^{-1} = \min_{p=j\omega_{k'}} \left[p \cdot \frac{b(p)}{d(p)} \right] > 0 \quad (k' = 1, 2, \dots, l) \quad (3.2.13)$$

によって直列キャパシテイを分離し次式の様に分解を行う。(第 3.11 図参照)

$$L = \frac{1}{f(p)} \begin{bmatrix} a(p) & b(p) \\ c(p) & d(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & C^{-1} p^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{f(p)} \begin{bmatrix} a'(p) & b'(p) \\ c(p) & d(p) \end{bmatrix} \quad (3.3.5)$$

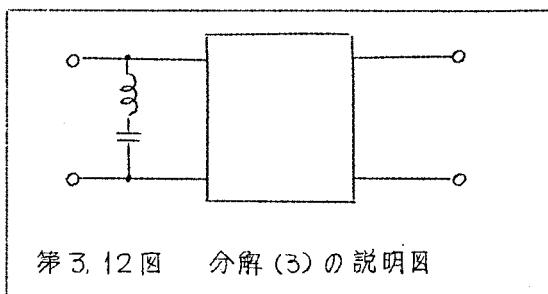
$$\left. \begin{aligned} \text{但し} \quad a'(p) &= a(p) - C^{-1} \cdot \frac{c(p)}{p} \\ b'(p) &= b(p) - C^{-1} \cdot \frac{d(p)}{p} \end{aligned} \right\} \quad (3.3.6)$$

式 (3.3.5) の右辺の残留マトリックスの $a'(p)$, $b'(p)$ は式 (3.2.13) によって定まる減衰極 $\pm j\omega_{k'}$ を共通根とし, しかも明かに条件 (3.3.2) を充している。ここで $\omega_{k'} \neq 0$ としておく。何故なら $\omega_{k'} = 0$ ならば、分解 (1) に帰着する。



分解 (3) $\lim_{p \rightarrow \pm j\omega_{k'}} \frac{b(p)}{d(p)} = 0$ の場合 (第 3.12 図参照)

この場合は全く定理 5 の " 分解 (4) " と同様であって、(3.2.19) の様に分解されて残留マトリックスについて条件 (3.3.2) が成立している事は容易に確かめ得る。



分解 (4) $\lim_{p \rightarrow j\infty} \frac{b(p)}{d(p)} = 0$ の場合

L が特異でなく且つ Z_{13} が回路を有するとき、無限遠点に2個の減衰極があればこの場合に帰着する。又無限遠点に3個以上の減衰極が存在し

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{b(p)}{d(p)} \right) = \infty$$

ならば

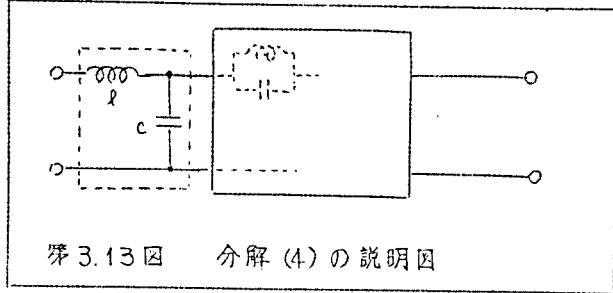


図 3.13 分解 (4) の説明図

$$\lim_{p \rightarrow j\infty} \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{b(p)}{d(p)} \right) = l \quad (3.3.7)$$

によって定まる直列腕インダクタンス l を分離すれば、常にこの場合に帰することが出来る。

さてかかる場合には次式により並列キャパシテイ C 及び上部減衰極 Q_k を決定する。

$$C = \min \left[\frac{1}{P} \cdot \frac{d(p)}{b(p)} \right]_{p=Q_k} \quad (k=1, 2, \dots, A-2) \quad (3.3.8)$$

これによって縦続マトリックス L は次の様に分解される。(カ 3.13 13 参照)

$$L = \frac{1}{f(p)} \begin{bmatrix} a(p) & b(p) \\ c(p) & d(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c \cdot p & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{f(p)} \begin{bmatrix} a'(p) & b'(p) \\ c'(p) & d'(p) \end{bmatrix} \quad (3.3.9)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} c'(p) &= c(p) - c \cdot p \cdot a(p) \\ d'(p) &= d(p) - c \cdot p \cdot b(p) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.10)$$

式 (3.3.9) の右辺の縦続マトリックスの第2行 $c'(p)$, $d'(p)$ は式 (3.3.8) から定まる共通根 Q_k を有し条件 (3.3.2) を允している。 $Q_k = \infty$ ならば、式 (3.3.7) によって直列インダクタンスを分離し再び上述の過程を繰返せばよい。従って Q_k は有限としてよい。

分解 (5) $\lim_{p \rightarrow jQ_k} \frac{b(p)}{d(p)} = \infty$ の場合 ;

上述の「分解 (4)」を遂行した後の残留マトリックスはこの場合に相当し

はじめ \mathbf{L} は特異でないと仮定したから、残留マトリックスは第2行 $c(p)$, $d(p)$ と $f(p)$ との間にだけ共通因子 $(p^2 + Q_k^2)$ が存在する。従って基本関係式によって $\frac{b(p)}{d(p)}$, $\frac{a(p)}{c(p)}$ の $\pm jQ_k$ における留数は相等しく次式が成立する。

$$\lim_{p \rightarrow jQ_k} \frac{p^2 + Q_k^2}{p} \cdot \frac{b(p)}{d(p)} = \lim_{p \rightarrow jQ_k} \frac{p^2 + Q_k^2}{p} \cdot \frac{a(p)}{c(p)} = C^{-1} \quad (3.3.11)$$

従って縦続マトリックスは次の如く分解される。(第3.14図参照)

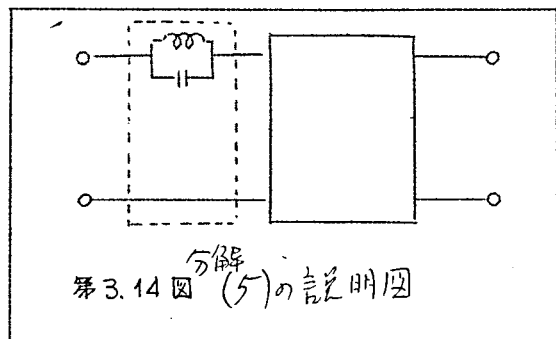
$$\mathbf{L} = \frac{1}{f(p)} \begin{bmatrix} a(p) & b(p) \\ c(p) & d(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{C^{-1} \cdot p}{p^2 + Q_k^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{f(p)} \begin{bmatrix} a'(p) & b'(p) \\ c'(p) & d'(p) \end{bmatrix} \quad (3.3.12)$$

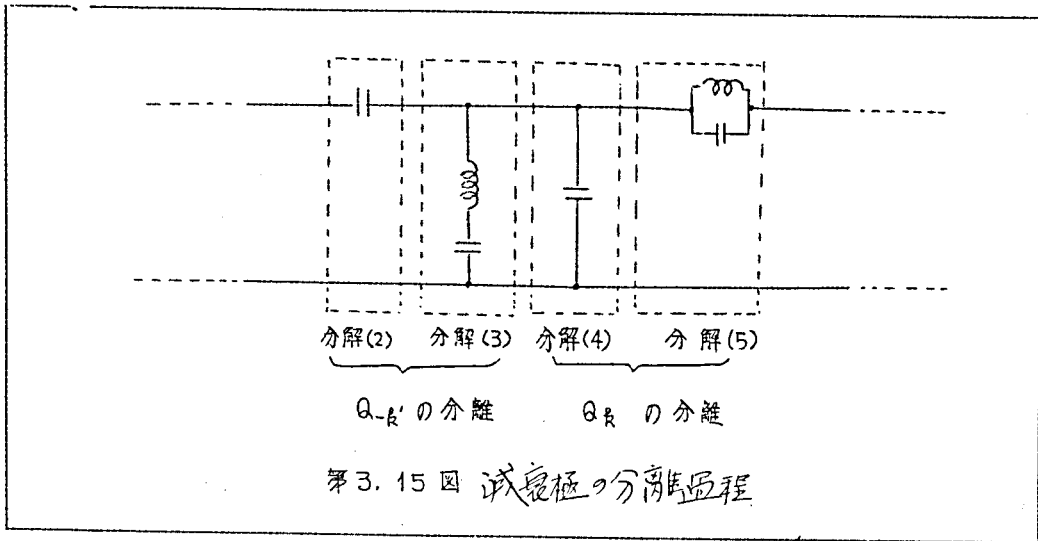
但し

$$\begin{cases} c(p) = (p^2 + Q_k^2) \cdot c'(p) \\ d(p) = (p^2 + Q_k^2) \cdot d'(p) \\ a'(p) = \frac{a(p) - C^{-1} \cdot p \cdot c'(p)}{p^2 + Q_k^2} \\ b'(p) = \frac{b(p) - C^{-1} \cdot p \cdot d'(p)}{p^2 + Q_k^2} \\ f(p) = (p^2 + Q_k^2) f'(p) \end{cases} \quad (3.3.13)$$

式(3.3.12)の残留マトリックスにおいては上部阻止域に属する減衰極 Q_k が1個除かれ各関数の次数は2次低下する。 Z_S の零点及び極はこの“分解(5)”によって如何に変化したかを調べる。先ず Z_S の無限遠点の行状は不変である。極は $\pm jQ_k$ が1個除かれた外は全く不変である。 Z_S の零点のうち Q_k より小なるものは全て増大し、 Q_k より大なるものは全て減少して、 Q_k の近傍に存在した $b(p)$ の零点のいずれか一方が取除かれた状態となっている。従って“分解(5)”によっても条件(3.2.27)がそのまま成立している。

特異でない \mathbf{L} の分解を進める際上述の如く下部阻止域の減衰極の分離は“分解(2)”





及び“分解(3)”によって行われ、上部阻止域の減衰極の分離は“分解(4)”及び“分解(5)”によって行われる^{（第3.15図参照）}。定理7の(i)が成立している限り無限遠点2個の減衰極が存在しており“分解(4)”及び“分解(5)”を適用して上部阻止域を分離することが出来る。分解を進めて遂に無限遠点に減衰極が存在しなくなれば、上部阻止域減衰極はもはや存在せず以後“分解(1)(2)(3)”によって高域濾波器を構成することになる。又分解が進められ“分解(2)”を遂行したとき原点に減衰極が存在しなくなれば、もはや下部阻止域の減衰極は消滅したことに外ならず、以後(4)(5)の分解を繰返して低域濾波器を構成することになる。何れも条件(3.3.2)が充されている限り、各分解手続きは実行可能である。減衰極の分離過程に必ず“分解(2)”或は“分解(4)”が行われ直列キマパシテイ或は並列キマパシテイ実現回路に導入されている。従って線輸だけからなるタイセット及びカットセットは絶対に存在し得ないのである。即ち与えられた縦続マトリックスに対して最小線輸数回路となっている。

次に“分解(1)”適用後 L が特異である場合を考えよう。先ず第1行のみが共通根 $j\Omega_p$ を有するとき、 Ω_p が下部阻止域に属するならば“分解(3)”に帰着するが、 Ω_p が上部阻止域に属すれば“分解(2)”或は“分解(4)”を特異性にかまわず適用すればよいのであって、分解操作を進める過程で特異性は除かれる。次に第2行に共通根を有するとき、それが上部阻止域に属すれば“分解(5)”を適用することが可能であり、下部阻止域に属すれば“分解(2)”或は“分解(4)”をそのまま適用すればよいのであって分解過程のうちで特異

性が除かれる。

更にマトリックスの第2列或は第1列が共通根を有する場合は定理5の証明に於て述べた事と同様に取扱い得て、 $W_{-1} < W_0 < W_1$ なる任意の W 。および正の数 ε を適当に選び L の代りに (3.2.21) 或は (3.2.23) で表わされる L' についても条件 (3.3.2) をそのまま成立させる事が必ず可能である。それは定理5の証明から容易に分ることである。 (証明終り)

定理7は同一の L マトリックスを有する回路構成のうち、線輪の個数が最小のものの実現性のための充分条件である。3.2.2 に於て述べた事と同様に条件 (3.3.2) 或は条件 (3.3.4) を充す減衰極が少くとも1個存在することはこの最小線輪のための必要条件となっている。

かかる必要条件が充されている場合の構成法は次の通りである。先ず条件 (3.3.2) (或は条件 (3.3.4)) を充している減衰極のうち一方の阻止域に属するものを順次定理7の構成法によって分離して行き、この阻止域に属する極はもはや定理7を充さなくなれば次に逆側の阻止域に属する減衰極を分離し順次これを繰返す。若し分解の途中で遂に定理7を充す減衰極は1個も存在しなくなれば、この回路は最小線輪回路としては実現出来ないが、このとき定理5を充す減衰極があれば以後は定理5の構成法に基づいて回路を実現する。

かくして出来る回路構成は最小個数ではないが定理5によって構成した場合より線輪数が少ない。定理7が成立すれば定理5は成立するが逆は成立しない。しかし実用上定理7を充さないものでも可能な限界まで定理7の構成法を遂行しそれが不能になったとき始めて定理5の構成法に変わる事が望ましい。何れの場合にも本章の構成法に従う限り最も負素子の生じ難い回路構成が得られるのである。

尚、低域濾波器から周知のリアクタンس変換によって得られる帯域濾波器は線輪の多い回路であり、これが最小線輪回路で実現出来る事が望まれるが、そのためには元となる低域濾波器は如何なるものであればよいかは定理7から容易に知られる。それは 3.3.3 に述べてある。

3.32 最小線輪数帯域濾波梯子回路構成法の実際

前節で述べた様に帯域濾波回路は使用する線輪の個数を出来る限り少なくする様

に構成することが実用上甚だ重要であり、実際にも定理7の理論を実用化して殆んどものは最小線輪数回路で実現されているのである。本節に於ては前節の理論の実用化について述べる。

又周知の如く縦続マトリックスの共通分母多項式 $f(p)$ と各要素多項式 $a(p)$, $b(p)$, $c(p)$, $d(p)$ の間には $\{a(p) \cdot d(p) - b(p) \cdot c(p)\} = f^2(p)$ が成立することから

$$\left. \begin{aligned} \frac{a(p)}{c(p)} - \frac{b(p)}{d(p)} &= \frac{f(p)}{c(p) \cdot d(p)} \\ \text{或は} \\ \frac{d(p)}{c(p)} - \frac{b(p)}{a(p)} &= \frac{f^2(p)}{c(p) \cdot a(p)} \\ \text{或は} \\ \frac{d(p)}{b(p)} - \frac{c(p)}{a(p)} &= \frac{f^2(p)}{a(p) \cdot b(p)} \\ \text{或は} \\ \frac{a(p)}{b(p)} - \frac{c(p)}{d(p)} &= \frac{f^2(p)}{b(p) \cdot d(p)} \end{aligned} \right\} \quad (3.3.14)$$

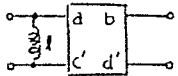
なる関係式が得られる。従って多くの場合上述の関係式を考慮する事によりマトリックス分解に際し一方の列(行)関数のみの計算で充分であるが、3.2.2 及び 3.3.1 に述べた理論はあくまでも縦続マトリックスの因数分解に基礎をおくものであり入出力短絡或は開放インピーダンスの展開ではない事に注意して計算を行わねばならない。

本節に於ては前節と同様 $Z_{15}(p)$ が回路の次数を有する場合について説明する。但し第2列 $b(p)$, $d(p)$ に関する計算と第1列 $a(p)$, $c(p)$ に関する計算は同一手順で行われるから両者を併記したから、実際には必要に応じて両者同時に或は一方のみを計算する。

分解(1)；並列インダクタンスの分離

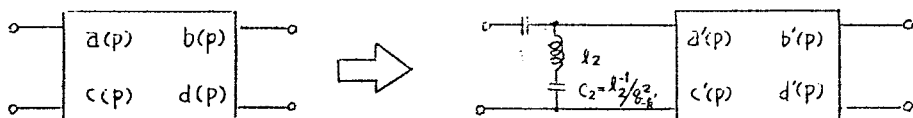
$b(p)$ と $d(p)$ 又は $a(p)$ と $c(p)$ の最低次の係数の比で分離すべき並列インダクタンスが定まり、このときの残留マトリックスの $c'(p)$, $d'(p)$ は次表の様に定めればよい。

第 3.4 表

場合	関数	係数 (p^2 の多項式とみなす)					素子値
①	$c(p)$ 又は $d(p)$	b_n	b_{n-1}	b_1	b_0	$\lambda^{-1} = \frac{b_0}{a_0}$ 実現回路 
	$a(p)$ 又は $b(p)$	a_n	a_{n-1}	a_1	a_0	
	$c'(p) = [c(p) - \lambda^{-1} \frac{a(p)}{p}]$ 又は						
	$b'(p) = [d(p) - \lambda^{-1} \frac{b(p)}{p}]$	$b_n \lambda^{-1} a_n$	$b_{n-1} \lambda^{-1} a_{n-1}$	$b_1 \lambda^{-1} a_1$	0	

分解(2) → 分解(3) ; 下部阻止域減衰極 g_{-k} の分離過程

直列キャパシテイを分離した後、共振周波数 g_{-k} なる並列腕直列共振回路を抽出する。 $g_{-k} = 0$ となれば“分解(1)”に帰着する。

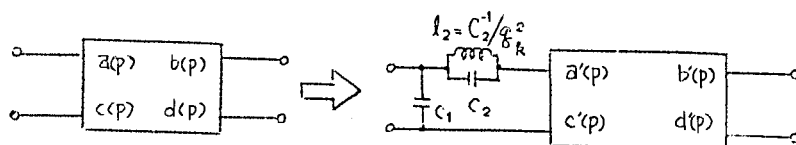


第 3.5 表

場合	関数	係数 (p^2 の多項式とみなす)					素子値
②	$a(p)$ 又は $b(p)$	a_n	a_{n-1}	a_1	a_0	$C_1^{-1} = \min \left[\frac{\alpha_{1k}}{\beta_{1k}} \cdot \frac{a_0}{b_0} \right]$ 各 g_{-k}^2 に関する $\frac{\alpha_{1k}}{\beta_{1k}}$ 及び $\frac{a_0}{b_0}$ の内 正の最小値を C_1^{-1} と する。今 $k=1$ が決ま ったものとして③の 計算に移る $g_2^{-1} = \frac{\beta_{1,1}}{\gamma_{1,1}}$
	$p^2 - g_{-k}^2$ で組立除法		$\overline{a_{n-1}}$	$\overline{a_1}$	α_{1k}	
	$c(p)$ 又は $d(p)$	b_n	b_{n-1}	b_1	b_0	
	$p^2 - g_{-k}^2$ で組立除法		$\overline{b_{n-1}}$	$\overline{b_1}$	β_{1k}	
③	$a'(p) = \frac{[a - C_1^{-1} p c]}{p^2 + g_{-1}^2}$ 又は	$a_n = \overline{a_n - C_1^{-1} b_n}$	$\overline{a_{n-1} - C_1^{-1} \overline{b_{n-1}}}$	$\overline{a_1 - C_1^{-1} \overline{b_1}}$	0	
	$b'(p) = \frac{[b - C_1^{-1} p d]}{p^2 + g_{-1}^2}$	a'_n	$\overline{a'_{n-1}}$	γ_{11}		
	$p^2 - g_{-1}^2$ で組立除法						残留マトリックスの要素 関数は左の如く求められ る。
	$a'(p)$ 又は $b'(p)$	a'_n	a'_{n-1}	a'_1		
	$c'(p) = \frac{[c - g_2^{-1} p a']}{p^2 + g_{-1}^2}$ 又は	$b'_n = b_n$	$\overline{b'_n - g_2^{-1} a'_n}$	$\overline{b'_1 - g_2^{-1} a'_2}$		
	$d'(p) = \frac{[d - g_2^{-1} p b']}{p^2 + g_{-1}^2}$						

分解(4) → 分解(5) ; (上部阻止域減衰極 g_k の分離過程)

並列キヤパシテイ C_1 を分離した後 g_k で共振する直列腕並列共振回路を抽出する。

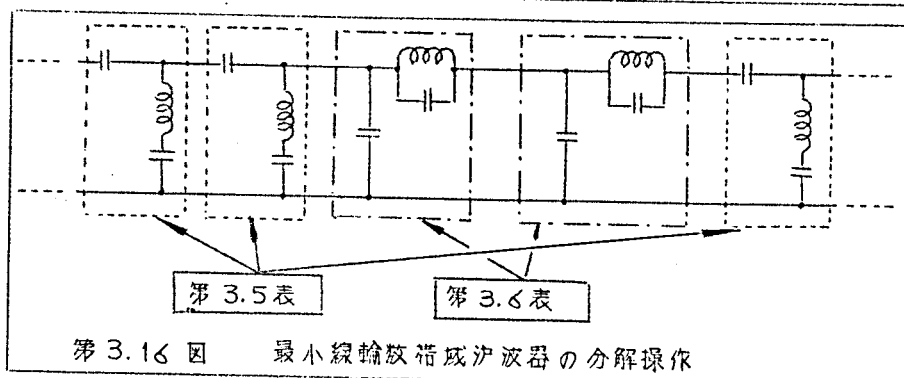


(3.2.33) によって $g_k = \infty$ とすれば直列インタクタンスを抽出することになる。

第 3.6 表

場合	関 数	係 数 (p^2 の多項式とみなす)	素 子 値
④	$c(p)$ 又は $d(p)$	$b_n \quad b_{n-1} \quad \dots \quad b_1 \quad b_0$	$C_1 = \min \left[\frac{\alpha_{1k}}{\beta_{1k}}, \frac{b_n}{a_n} \right]$
	$p^2 = -g_k^2$ で組立除法	$b_n \quad \overline{b_{n-1}} \quad \dots \quad \overline{b_1} \quad \overline{b_0}$ α_{1k} -除余	各 g_k^2 に関する $\frac{\alpha_{1k}}{\beta_{1k}}$ 及び $\frac{b_n}{a_n}$ の内正の最小値を C_1 とする。今 $k=1$ が定まったら②の計算に移る。
⑤	$a(p)$ 又は $b(p)$	$a_n \quad a_{n-1} \quad \dots \quad a_1 \quad a_0$	
	$p^2 = -g_k^2$ で組立除法	$a_n \quad \overline{a_{n-1}} \quad \dots \quad \overline{a_1} \quad \overline{a_0}$ β_{1k} -除余	
	$c'(p) = \frac{[c - C_1 \cdot p a]}{p^2 + g_k^2}$ 又は $d'(p) = \frac{[d - C_1 \cdot p b]}{p^2 + g_k^2}$	$b'_n = b_n - C_1 \cdot a_n \quad b'_{n-1} = \overline{b_{n-1}} - C_1 \cdot \overline{a_{n-1}} \quad \dots \quad b'_1 = \overline{b_1} - C_1 \cdot \overline{a_1} \quad b'_0 = 0$	
	$p^2 = -g_1^2$ で組立除法	$b'_n \quad \overline{b'_{n-1}} \quad \dots \quad \overline{b'_1} \quad \overline{b'_0}$ β_{11} -除余	
	$c'(p)$ 又は $d'(p)$	$b'_n \quad b'_{n-1} \quad \dots \quad b'_1 \quad b'_0$	残留マトリックスの要素開放は左の如く求められる。
	$a'(p) = \frac{[a - C_2^{-1} \cdot p c']}{p^2 + g_k^2}$ 又は $b'(p) = \frac{[b - C_2^{-1} \cdot p d']}{p^2 + g_k^2}$	$a'_n = a_n - C_2^{-1} \cdot b'_n \quad a'_{n-1} = \overline{a_{n-1}} - C_2^{-1} \cdot \overline{b'_{n-1}} \quad \dots \quad a'_1 = \overline{a_1} - C_2^{-1} \cdot \overline{b'_1} \quad a'_0 = 0$	

この様にして例えば第 3.16 図の様な回路構成は

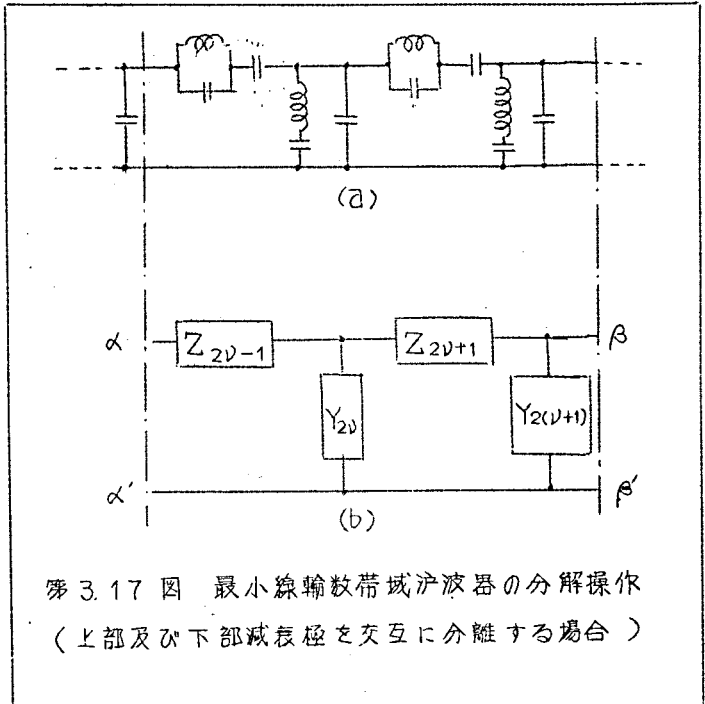


第 3.16 図 最小線輸数帯域濾波器の分解操作

図に示す様に第3.5表と第3.6表の組合せで計算出来るのである。

しかし上部阻止域との減衰極を交互に分離して行く場合第3.5表及び第3.6表の計算を行うことは手数がかかり面倒である。このとき若し交互に分離すべき減衰極があらかじめ知られているならば計算は極めて手際よく行われる。

今上部及び下部の減衰極を $g_v, g_{-v}, g_{v+1}, g_{-(v+1)}$ の順に交互に次々分離して行くものとしよう。このとき実現される回路は第3.17図(a)の如くなりこれは記号的に(b)図の様に表わされる。但し(b)図に於て直列インピーダンス Z_{2v-1} 及び並列アドミッタンス Y_{2v} は夫々 p の3次式であって次式で表わされる。



第3.17図 最小線輸数帯域濾波器の分解操作
(上部及び下部減衰極を交互に分離する場合)

$$\left. \begin{aligned} Z_{2v-1}(p) &= \frac{Z_{2v-1}}{p} \cdot \frac{p^2 + g_v'^2}{p^2 + g_v^2} \\ Y_{2v}(p) &= y_{2v} \cdot p \cdot \frac{p^2 + g_{-v}'^2}{p^2 + g_{-v}^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.3.15)$$

但し g_v, g_{-v} は Z_{2v-1}, Y_{2v} の零点又 Z_{2v-1}, Y_{2v} は定数である。

さて計算が進行して第3.17図(b)に於ける $\alpha-\alpha'$ のところまで到達したとき、縦続マトリックスが次の様に表わされたものとする。

$$\frac{H}{f(p)} \begin{bmatrix} a(p) & b(p) \\ (p^2 + g_v^2) c(p) & (p^2 + g_v^2) d(p) \end{bmatrix} \quad (3.3.16)$$

簡単のため上式に於て

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{2v-1}(p) &= a(p) \text{ 又は } b(p) \\ \xi_{2v-1}(p) &= c(p) \text{ 又は } d(p) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.17)$$

第3.7表 一般帯域濾波機の三次インピーダンス展開の基礎計算公式

関数	$\begin{cases} \eta_{2\nu-1}(p) = a(p) \text{ 又は } b(p) \\ \xi_{2\nu-1}(p) = c(p) \text{ 又は } d(p) \end{cases}$		
		多項式の商及び剰余	素子算出公式
Z _{2ν-1} 分離過程	被除多項式	$\eta_{2\nu-1}(p)$	$A_\nu = (g_\nu^2 - g_{\nu-1}^2) \cdot \alpha'_{2\nu-1} - \alpha'_{2\nu-1}$
	($p^2 + g_\nu^2$)で組立除法	$\eta'_{2\nu-1}(p) \quad \quad \beta'_{2\nu-1}$	$Z_{2\nu-1}, g_\nu'^2$ は次式から求められる。
	($p^2 + g_\nu^2$) "	$\eta_{2\nu-1}(p) \quad \quad \beta_{2\nu-1}$ (β, β' は剰余である)	$\begin{cases} Z_{2\nu-1} = \frac{A_\nu \beta_{2\nu-1} + \alpha_{2\nu-1} \beta'_{2\nu-1}}{A_\nu \cdot \alpha'_{2\nu-1}} \\ g_\nu'^2 = g_\nu^2 - \frac{\alpha'_{2\nu-1} \beta'_{2\nu-1}}{A_\nu \beta_{2\nu-1} + \alpha_{2\nu-1} \beta'_{2\nu-1}} \end{cases}$
	被除多項式	$\xi_{2\nu-1}(p)$	
	($p^2 + g_\nu^2$)で組立除法	$\xi'_{2\nu-1}(p) \quad \quad \alpha'_{2\nu-1}$	
	($p^2 + g_\nu^2$) "	$\xi_{2\nu-1}(p) \quad \quad \alpha_{2\nu-1}$ (α', α は剰余である)	$\begin{cases} \text{IDL} \\ A_\nu = (g_\nu^2 - g_{\nu-1}^2) \cdot \alpha_{2\nu-1} - \alpha'_{2\nu-1} \end{cases}$
関数	$\begin{cases} \xi_{2\nu}(p) = \xi_{2\nu-1}(p) \\ \eta_{2\nu}(p) = \eta_{2\nu-1}(p) - Z_{2\nu-1} \left[(p^2 + g_\nu^2) \xi_{2\nu-1}(p) + \alpha_{2\nu-1} \right] \end{cases}$		
Y _{2ν} 分離過程	被除多項式	$\xi_{2\nu}(p)$	$B_\nu = (g_{\nu+1}^2 - g_\nu^2) \beta_{2\nu} + \beta'_{2\nu}$
	($p^2 + g_\nu^2$)で組立除法	$\xi'_{2\nu}(p) \quad \quad \alpha'_{2\nu}$	$y_{2\nu}, g_\nu'^2$ は次々次式から求められる。
	($p^2 + g_{\nu+1}^2$) "	$\xi_{2\nu}(p) \quad \quad \alpha_{2\nu}$ (α', α は剰余である)	$\begin{cases} y_{2\nu} = \frac{B_\nu \alpha_{2\nu} - \alpha'_{2\nu} \beta_\nu}{B_\nu \cdot \beta'_{2\nu}} \\ g_\nu'^2 = g_\nu^2 + \frac{\alpha'_{2\nu} \beta'_{2\nu}}{B_\nu \alpha_{2\nu} - \alpha'_{2\nu} \beta'_{2\nu}} \end{cases}$
	被除多項式	$\eta_{2\nu}(p)$	
	($p^2 + g_{\nu+1}^2$)で組立除法	$\eta'_{2\nu}(p) \quad \quad \beta'_{2\nu}$	
	($p^2 + g_\nu^2$) "	$\eta_{2\nu}(p) \quad \quad \beta_{2\nu}$ (β, β' は剰余である)	$\text{IR} \\ B_\nu = (g_{\nu+1}^2 - g_\nu^2) \beta_{2\nu} + \beta'_{2\nu}$
関数	$\begin{cases} \eta_{2(\nu+1)-1}(p) = \eta_{2\nu}(p) \\ \xi_{2(\nu+1)-1}(p) = \xi_{2\nu}(p) - y_{2\nu} \left[(p^2 + g_\nu^2) \eta_{2\nu}(p) + \beta_{2\nu} \right] \end{cases}$ (以下 Z _{2(ν+1)-1} 分離過程を続ける)		

とおくとき、 $\zeta_{2\nu-1}(p)$, $\xi_{2\nu-1}(p)$ から、直列インピーダンス $Z_{2\nu-1}$ 、及び並列アドミタンス $Y_{2\nu}$ を求めるため第3.7表の計算を実行する。第3.7表の計算を繰返して行えば、第3.17図の回路構成を実現することが出来るのである。かかる回路構成に於ては各インピーダンス腕が p の3次式であるところから、「3次インピーダンス展開法」と著者は名付けて実用化されている。次節に述べる様に標準低域濾波器からの周波数変換により帯域濾波器を構成する際重要な応用がある。

3.3.3 対称減衰特性帯域濾波器の三次インピーダンス展開法

3.3.1 及び 3.3.2 に於ては減衰特性が周波数に対して非対称である様な一般の帯域濾波器の最小線輪数回路構成理論及び実際について述べたが、本項に於ては基準となる低域濾波器から周波数変換によって得られる対称減衰特性帯域濾波器の最小線輪数回路構成の理論及び実際について述べる。(39)

基準低域濾波器が既の実現出来たものとすれば、その周波数変換によって求まる帯域濾波器は低域濾波器における L , C を夫々直列共振回路、並列共振回路に置換えれば得られるが、線輪のみからなるタイセット、カットセットの多い回路構成で実用上極めて不利である。かかる帯域濾波器が最小線輪数回路で構成出来るためには(定理7)が満足されていればよい。定理7を逆の周波数変換によって基準低域濾波器に適用すれば次の定理が得られる。

8 (定理 7)

低域濾波器の縦続マトリックスを次式の如く表わす。

$$\frac{H}{f(\lambda)} \begin{bmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{bmatrix} \quad (3.3.18)$$

今低域濾波器が無限遠点に2個以上の減衰極を有し、且つ有限領域に存在する減衰極を Q_k ($Q_1 < Q_2 < \dots < Q_m$) とするとき、最高次数を有する要素関数 (B 或は C) が属する列の主対角要素関数 ($C(\lambda)$ に対して $A(\lambda)$ 又は $B(\lambda)$ に対しては $D(\lambda)$) の零点の内 Q_k より大きくないものが少くとも $(k+1)$ 個あれば、この低域濾波器に対して

$$\lambda = \frac{1}{A} \cdot \frac{p^2 + k'}{p} \quad (3.3.19)$$

但し

λ : 低域濾波器の複素角周波数

p : 帯域濾波器の複素角周波数

$$A = \frac{1 - k'}{\Omega_p} \begin{cases} k' = \frac{f - p}{f + p} & ; \text{ 帯域濾波器的帯域係数} \\ k_0 = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} & ; \text{ 基準低域濾波器的帯域係数} \end{cases}$$

と表わされる変換を施し得られる縦続マトリックスは必ず最小線輪個数の正素子梯子回路として実現出来る。

[証 明]

λ 平面を変換 (3.3.19) によって p 平面に写像すれば、 λ 平面の上半面と下半面が p 平面の上半面では半径 $\sqrt{k'}$ の円の外部と内部に、又 p 平面の下半面では半径 $\sqrt{k'}$ の円の内部と外部に夫々写像される。従って λ の関数 $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, $D(\lambda)$, $f(\lambda)$ を変換 (3.3.19) によって $a(p)$, $b(p)$, $c(p)$, $d(p)$, $f'(p)$ に変換すれば、 λ の虚軸上の有限領域に存在する零点は p 平面の虚軸上の領域 $[\pm j\sqrt{k'}, \pm j\infty]$ に相互の大小関係をそのまま保って写像され、同時に領域 $(0 \pm j\sqrt{k'})$ に相互の大小関係を逆転して写像される。

今 $B(\lambda)$ が最高次数を有する多項式である場合を考察する。低域濾波器では $f(\lambda)$ は偶関数、 $B(\lambda)$ は奇関数、 $D(\lambda)$ は偶関数であるから、 $B(\lambda)$, $D(\lambda)$, $f(\lambda)$ の零点を大きさの順に番号をつけ大々 β_k , γ_k , Q_k と表わせば、 β_k , γ_k はリアクタンس関数としての性質から次の関係を充す。

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_{k-1} < \gamma_{k-1} < \beta_k \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (3.3.20)$$

又定理が正しいとすれば、 $Q_1 \leq Q_2 \leq \dots \leq Q_M$ に対して

$$\gamma_k \leq Q_k \quad (3.3.21)$$

となり式 (3.3.20) 及び式 (3.3.21) より次式を得る。但し $Q_k = \infty$ ($k > M$) とする。

$$\beta_k < \gamma_k \leq Q_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots, N)$$

p 平面に変換されると上の関係は次の如く表わされる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{上部阻止域 } (1, \infty) \text{ に於て : } p_R < g_R \leq Q'_R \\ \text{下部阻止域 } (0, R') \text{ に於て : } p_{-R'} < g_{-R'} \leq Q'_{-R'} \end{array} \right\} \quad (3.3.22)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{上部阻止域 } (1, \infty) \text{ に於て : } p_R < g_R \leq Q'_R \\ \text{下部阻止域 } (0, R') \text{ に於て : } p_{-R'} < g_{-R'} \leq Q'_{-R'} \end{array} \right\} \quad (3.3.23)$$

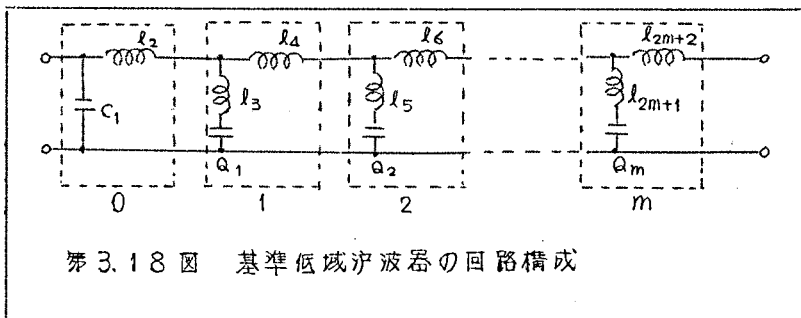
但し $\left\{ \begin{array}{l} \beta_R \text{ は } p_R \text{ 及び } p_{-R'} \text{ に変換されたものとする。} \\ g_R \text{ は } g_R \text{ 及び } g_{-R'} \text{ に変換されたものとする。} \\ Q_R \text{ は } Q'_R \text{ 及び } Q'_{-R'} \text{ に変換されたものとする。} \end{array} \right.$

(3.3.22) は第3章 3.2.1 の定理7に於ける (3.3.2) と一致する。又次数の関係より低域濾波器の無限遠点に於ける減衰極は2位以上でなければならぬから帯域濾波器では無限遠点及び原点に減衰極を2個以上有することになり (定理7) の (i) の場合に全く一致する。B(∞) 以外のものが回路次数を有している時でも同様に証明することが出来る。 (証明終り)

定理8から分る様にこの条件は通常の低域濾波器の実現条件に近くわずかに厳しくなっている事がわかるのである。この事から本項に述べる三次インピーダンス展開は低域濾波器が実現可能であれば略々実現出来る事が予想されるが、事実著者等は極めて多くの計算例を手がけて来たが、基準低域濾波器が実現出来る様な通過域チェビシェフ特性濾波器では例外なく三次インピーダンス展開可能であった。

さて実際に計算を遂行するには周波数変換によって求まった縦続マトリックスについて第3.7表の方法を適用すればよいわけである。しかし一度基準低域濾波器の実現回路を藤沢の構成法で導き、その実現回路から求まる因数分解されたマトリックスを変換して第3.7表に相当する計算を行えば、計算術数が少なく済み手数も簡単且つ計算速度が高まるのである。以下その方法を具体的に説明する。

第3.18図に示す様な基準低域濾波器の周波数変換によって与えられる帯域濾波器の縦続マトリックスを L



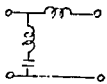
とすれば次式で表わされる。

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 \cdot \prod_{\nu=1}^m \mathbf{L}_{\nu} \quad (3.3.24)$$

但し

$$\mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_1 \cdot \frac{p^2 + k'}{A \cdot p} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_2 \cdot \frac{p^2 + k'}{A \cdot p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{c} \text{---} l_1 \text{---} \\ | \\ \text{---} c_1 \text{---} \end{array} \quad \text{の交換されたマトリックス} \quad (3.3.25)$$

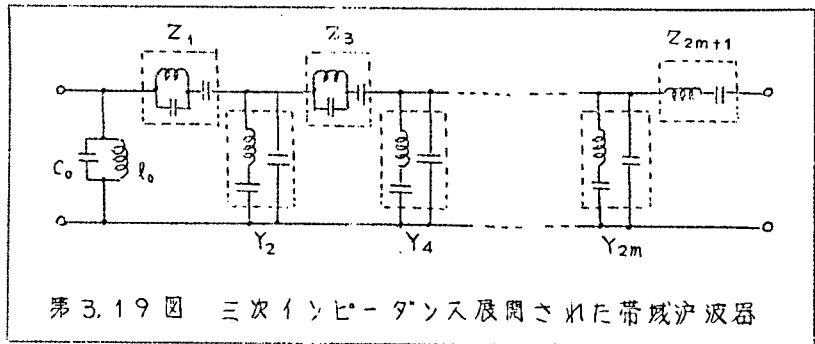
$$\mathbf{L}_{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{2\nu+1}^{-1} \cdot \frac{A(p^2 + k')p}{(p^2 + k')^2 + p^2 A^2 Q_{\nu}^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{2\nu+2} \cdot \frac{p^2 + k'}{A p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$



の交換されたマトリックス

(3.2.26)

さて (3.3.24) で表わされるマトリックス \mathbf{L} が3次インピーダンスのマトリックスに因数分解されて行き、第 $\nu-1$ 番目の段階に達したとき、 $\nu-1$ 番目から ν 番目の段階に計算を進める場合を考察しよう。それは次のマトリックス方程式を解く事に帰着する。



$$\mathbf{L}'_{\nu-1} \cdot \mathbf{L}_{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & Z_{2\nu-1}(p) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_{2\nu}(p) & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{L}'_{\nu}(p) \quad (3.3.27)$$

($\nu = 1, 2, 3, \dots, m$)

但し

$$\mathbf{L}'_{\nu-1} = \begin{bmatrix} A_{\nu-1} & \frac{1}{p} B_{\nu-1} \cdot (p^2 + g_{\nu-1}^2) \\ C_{\nu-1} \cdot p & D_{\nu-1} \cdot (p^2 + g_{\nu-1}^2) \end{bmatrix}; \quad (\nu-1) \text{ 段階における残留マトリックス} \quad (3.3.28)$$

$$Z_{2\nu-1}(p) = \frac{Z_{2\nu-1}}{p} \cdot \frac{p^2 + g_{\nu}^2}{p^2 + g_{\nu-1}^2}; \quad \text{直列インピーダンス (第 3.19 図参照)} \quad (3.3.29)$$

$$Y_{2v}(p) = Y_{2v} p \cdot \frac{p^2 + g_{v2}'^2}{p^2 + g_{v1}^2} : \text{並列アドミタンス (3.19図参照)} \quad (3.3.30)$$

ここで g_{v1} , g_{v2} は低域濾波器の減衰極 Q_v を変換して得られた値であり $g_{v1} < g_{v2}$ とする。

さて方程式 (3.3.27) に於て左辺のマトリックスは既知であって次の様に表示される。

$$L_{v-1} \cdot L_v = \frac{1}{(p^2 + g_{v1}^2)(p^2 + g_{v2}^2)} \begin{bmatrix} A_{v-1,v}(p) & \frac{1}{p} B_{v-1,v}(p) \\ p(p^2 + g_{v1}^2) C_{v-1,v}(p) & (p^2 + g_{v1}^2) D_{v-1,v}(p) \end{bmatrix} \quad (3.3.31)$$

値は

$$\begin{aligned} B_{v-1,v}(p) &= \frac{A_{v-1} \cdot l_{2v+2}}{A} (p^2 + k') (p^2 + g_{v1}^2) (p^2 + g_{v2}^2) \\ &\quad + B_{v-1} (p^2 + g_{v-1}'^2) \left[l_{2v+1}^{-1} \cdot l_{2v+2} (p^2 + k')^2 + (p^2 + g_{v1}^2) (p^2 + g_{v2}^2) \right] \\ D_{v-1,v}(p) &= \frac{C_{v-1} \cdot l_{2v+2}}{A} (p^2 + g_{v2}^2) (p^2 + k') + D_v \left[l_{2v+1}^{-1} \cdot l_{2v-2} (p^2 + k')^2 + (p^2 + g_{v1}^2) (p^2 + g_{v2}^2) \right] \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

マトリックス方程式 (3.3.27) から直列3次インピーダンスマトリックス、並列アドミタンスマトリックスを分解し且つ残留マトリックスを見出すのには (3.3.31) のマトリックスの第2列の2個の多項式 $B_{v-1,v}(p)$ 及び $D_{v-1,v}(p)$ を知れば全部の答が簡単に求められるのである。このとき

z_{2v-1} , $g_{v1}'^2$, y_{2v} , $g_{v2}'^2$, B_v , $g_v'^2$, D_v が計算される。即ち L_v の係数 A_v , C_v は次式で求められるのである。

$$\left. \begin{aligned} A_v^{-1} &= D_v \cdot (g_{v+1,1}^2 - g_v'^2) \\ C_v^{-1} &= B_v \cdot (g_{v+1,1}^2 - g_v'^2) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.33)$$

実際の計算手順を次に示す。

(i) 帯域変換に必要な諸パラメータの算出

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{帯域濾波器の帯域係数 } k' = f_p / f_p \\ \text{基準低域濾波器の帯域係数 } k_0 = \begin{cases} \omega_s / \omega_p : \text{連立チエビシエフ特性の場合} \\ 1 : \text{通過域チエビシエフ特性の場合} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{帯域変換定数 } A = \frac{1-k'}{\omega_p} \quad \omega_p : \text{低域濾波器の基準周波数} \end{array} \right.$$

(ii) 基準低域濾波器素子値の処理

第3.8表 変換の基礎データの表

番号 ν	基準LPの素子値		計算すべき数値			備 考
	$l_{2\nu+1}$	$l_{2\nu+2}$	$l_{2\nu+1}^{-1} \cdot l_{2\nu+2}$	$l_{2\nu+1}/A$	$l_{2\nu+2}/A$	
0	C_1^*	l_2	$C_1 \cdot l_2$	C_1/A	l_2/A	* l_1 の代りに C_1 を計算に用 いる。
1	l_3	l_4	$l_3^{-1} \cdot l_4$	l_3/A	l_4/A	
2	l_5	l_6	$l_5^{-1} \cdot l_6$	l_5/A	l_6/A	

(iii) 帯域濾波器減衰極の計算

基準低域濾波器の減衰極 Q_ν に対応する帯域濾波器の上部及び下部減衰極 $g_{\nu 1}$, $g_{\nu 2}$ は次式で求められる。

$$\begin{aligned} \text{上部減衰極 } g_{\nu 1}^2 &= \left[k' + \frac{A^2 \cdot Q_\nu^2}{2} \right] + \frac{Q_\nu \cdot A}{2} \sqrt{4k' + A^2 \cdot Q_\nu^2} \\ \text{下部減衰極 } g_{\nu 2}^2 &= \left[k' + \frac{A^2 \cdot Q_\nu^2}{2} \right] - \frac{Q_\nu \cdot A}{2} \sqrt{4k' + A^2 \cdot Q_\nu^2} \end{aligned} \quad (3.3.34)$$

$g_{\nu 1}^2$, $g_{\nu 2}^2$ を計算すると同時に第3.9表の数値を求めておかねばならない。

第3.9表 減衰極及び関連データ

ν	$g_{\nu 1}^2$	$g_{\nu 2}^2$	$g_{\nu 1}^2 - g_{\nu 2}^2$	$g_{\nu+1,1}^2 - g_{\nu 1}^2$	$g_{\nu+1,1}^2 - g_{\nu 2}^2$	$g_{\nu 1}^2 - k'$	$(g_{\nu 1}^2 - k')^2$	$k' - g_{\nu 2}^2$	$(k' - g_{\nu 2}^2)^2$
1									
2									
3									

(iv) 主要計算

第3.7表 ~ 第3.9表の準備計算が終ると、次に第3.10表の主要計算を行う。但し第3.10表の計算は $(\nu-1)$ 番目の段階の計算終了後 ν 番目の段階の計算を示したものである。但し最初と最後の計算は次に述べる。

第 3. 10 表 三次インピーダンス展開主要計算

v-1番目の残留マトリックスの定数		A_{v-1}	B_{v-1}	C_{v-1}	D_{v-1}	$g_{v-1}^{'2}$	
	求める Z, Y の定数	計 算 公 式				残留マトリックスの定数	
Z_{2v-1} の 計 算	$g_{v1}^{'2}$ Z_{2v-1}	$\Gamma_v = \frac{C_{v-1}}{D_{v-1}} \left(\frac{l_{2v+1}}{A} \right) \frac{g_{v-1}^{'2} - g_{v2}^{'2}}{g_{v1}^{'2} - k'}$					
		$g_{v1}^{'2} - g_{v1}^{'2} = \frac{g_{v1}^{'2} - g_{v-1}^{'2}}{\Gamma_v + 1}$		$g_{v1}^{'2} = g_{v1}^{'2} - \frac{g_{v1}^{'2} - g_{v-1}^{'2}}{\Gamma_v + 1}$			
		$Z_{2v-1} = \frac{B_{v-1}}{D_{v-1}} \cdot \frac{g_{v-1}^{'2} - g_{v2}^{'2}}{(g_{v1}^{'2} - g_{v2}^{'2}) - (g_{v1}^{'2} - g_{v-1}^{'2})}$					
B_v の 計 算		$\alpha_v = A_{v-1} \left(\frac{l_{2v+2}}{A} \right) + B_{v-1} (1 + l_{2v+1}^{-1} \cdot l_{2v+2})$		$\beta_v = C_{v-1} \left(\frac{l_{2v+2}}{A} \right) + D_{v-1} (1 + l_{2v+1}^{-1} \cdot l_{2v+2})$		B_v $\left[\begin{array}{l} v=1 \text{ のとき} \\ w_1 = \frac{\alpha_1}{1 + l_2 \cdot l_3^{-1}} \end{array} \right]$ $g_v^{'2}$	
		$B_v = \alpha_v - \beta_v \cdot Z_{2v-1}$					
		$w_v = \frac{\alpha_v}{A_{v-1} + B_{v-1} \left(\frac{A}{l_{2v+1}} \right)}$					
		$g_v^{'2} - g_{v2}^{'2} = \left(\frac{l_{2v+2}}{A} \right) \cdot \frac{k' - g_{v2}^{'2}}{w_v}$		$g_v^{'2} = g_{v2}^{'2} + \left(\frac{l_{2v+2}}{A} \right) \cdot \frac{k' - g_{v2}^{'2}}{w_v}$			

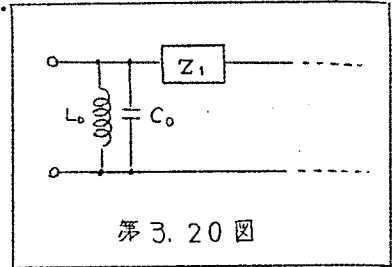
Y _{2ν} の 計 算		$\delta_\nu = C_{\nu-1} \cdot \left(\frac{l_{2\nu+2}}{A} \right)$	$\delta_\nu = D_{\nu-1} \cdot (l_{2\nu+1}^{-1} \cdot l_{2\nu+2})$	$D_{\nu-1}$		
		$d = \delta_\nu \cdot (\kappa' - \delta_{\nu 2}^2)^2$				
		$d' = \delta_\nu \cdot (\delta_{\nu+1,1}^2 - \kappa')(\delta_{\nu+1,1}^2 - \delta_{\nu 2}^2) + \delta_\nu \cdot (\delta_{\nu+1,1}^2 - \kappa')^2 + D_{\nu-1}(\delta_{\nu+1,1}^2 - \delta_{\nu 1}^2)(\delta_{\nu+1,1}^2 - \delta_{\nu 2}^2)$				
		$\Gamma'_\nu = \frac{d'}{d} \cdot \frac{\delta_\nu'^2 - \delta_{\nu 2}^2}{\delta_{\nu+1,1}^2 - \delta_\nu'^2}$				
	$\delta_{\nu 2}^2$	$\delta_{\nu 2}'^2 - \delta_{\nu 2}^2 = \frac{\delta_{\nu+1,1}^2 - \delta_{\nu 2}^2}{\Gamma'_\nu + 1}$	$\delta_{\nu 2}'^2 = \delta_{\nu 2}^2 + \frac{\delta_{\nu+1,1}^2 - \delta_{\nu 2}^2}{\Gamma'_\nu + 1}$			
	$y_{2\nu}$	$y_{2\nu} = \frac{d}{B_\nu(\delta_{\nu 2}'^2 - \delta_{\nu 2}^2)(\delta_\nu'^2 - \delta_{\nu 2}^2)}$				
		$D_\nu = \beta - y_{2\nu} \cdot B_\nu$			D_ν	
ν番目の残留マトリックスの定数		$A_\nu = \frac{1}{D_\nu(\delta_{\nu+1,1}^2 - \delta_\nu'^2)}$	B_ν	$C_\nu = \frac{1}{B_\nu(\delta_{\nu+1,1}^2 - \delta_\nu'^2)}$	D_ν	$\delta_\nu'^2$
検	算	$\frac{B_\nu}{A_\nu} = \frac{D_\nu}{C_\nu} = w_\nu$				

(V) 三次インピーダンス展開法の始めと終りの計算法

三次インピーダンス展開の計算は第3.10表を繰返し計算して行けばよいのであるが、計算の始めと終りには次の様にせねばならない。

先ず計算の始めには、並列共振回路 L_0, C_0 を次式で計算しよう。

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \left[\begin{array}{cc} C_1 & A \\ A & \ell_2 (\delta_{1,1}^2 - k') \end{array} \right] \\ L_0 &= \frac{1}{k'} \cdot \left(\frac{A}{C_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.35)$$



第3.20図

但し、 C_1 は基準低域濾波器の素子値である。

次に第3.10表の計算を行うのであるが、

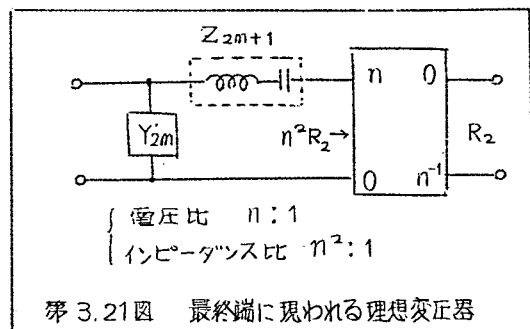
Z_1 の計算過程だけを示すと第3.11表の様になる。

第3.11表 三次インピーダンス展開法・最初の計算

最初の残留マトリックスの定数		$A_0 = 1.0$	$B_0 = \frac{\ell_2}{A}$	$C_0 = \frac{1}{B_0(\delta_{11}^2 - k')}$	$D_0 = \frac{1}{(\delta_{11}^2 - k')}$	$\delta_0'^2 - k'$
		計 算 公 式				
Z ₁ の 計 算	$\delta_{11}'^2$ Z	$\Gamma_1 = \ell_2^{-1} \cdot \ell_2 \cdot \frac{k' - \delta_{12}^2}{\delta_{11}^2 - k'} = C_0 \cdot \left(\frac{\ell_3}{A} \right) (k' - \delta_{12}^2)$				
		$\delta_{11}^2 - \delta_{11}'^2 = \frac{\delta_{11}^2 - k'}{\Gamma_1 + 1}$		$\delta_{11}'^2 = \delta_{11}^2 - \frac{\delta_{11}^2 \cdot k'}{\Gamma_1 + 1}$		
		$Z_1 = \left(\frac{\ell_2}{A} \right) \frac{(\delta_{11}^2 - k')(k' - \delta_{1,2}^2)}{(\delta_{1,1}^2 - \delta_{1,2}^2)(\delta_{1,1}^2 - \delta_{1,1}'^2)}$				
		以下第3.10表と同じ				

計算が進行して最終段階に達すれば最終の残留マトリックス第3.21図に示す様に $n:1$ (インピーダンス比では $n^2:1$) の理想変圧器となり、後述の理想変圧器変換を行うか、或は $n^2 \times$ (終端抵抗) を実際の終端抵抗としなければならない。

又第3.21図に於て Y_{2m}, Z_{2m+1} は夫々



第3.21図 最終端に現われる理想変圧器

$$\left. \begin{aligned} Y_{2m} &= y_{2m} p \cdot \frac{p^2 + g_{m2}'^2}{p^2 + g_{m2}^2} \\ Z_{2m+1} &= Z_{2m+1} \cdot \frac{p^2 + g_m'^2}{p} \end{aligned} \right\} \quad (3.3.36)$$

と表わされ、その値は次表の如く算出する。

第3.12表 三次インピーダンス展開法；最後の計算

Z _{2m-1} の計算過程は第3.10表と同じ				
B _m g _m ² の 計 算		$\alpha_m = A_{m-1} \left(\frac{l_{2m+2}}{A} \right) + B_{m-1} (1 + l_{2m+1}^{-1} \cdot l_{2m+2})$		$\beta_m = C_{m-1} \left(\frac{l_{2m+2}}{A} \right) + D_{m-1} (1 + l_{2m+1}^{-1} \cdot l_{2m+2})$
		$B_m = \alpha_m - \beta_m \cdot Z_{2m-1}$		
		$W_m = \alpha_m / \left[A_{m-1} + B_{m-1} \left(\frac{A}{l_{2m+1}} \right) \right]$		
	g _m ²	$g_m'^2 - g_{m2}^2 = \left(\frac{l_{2m+2}}{A} \right) \cdot \frac{k' - g_{m2}^2}{W_m}$	$g_m'^2 = g_{m2}^2 + \left(\frac{l_{2m+2}}{A} \right) \cdot \frac{k' - g_{m2}^2}{W_m}$	
Y _{2m} Z _{2m+1} の 計 算	y _{2m}	$y_{2m} = \frac{\beta_m}{B_m}$		n
Z _{2m+1}	$Z_{2m+1} = \frac{B_m^2}{W_m}$			
	$\eta = \frac{B_m}{W_m}$			
g _{m2} ²	$g_{m2}'^2 - g_{m2}^2 = \frac{D_{m-1}}{\beta_m} \cdot \frac{A \cdot W_m}{l_{2m+1}} (k' - g_{m2}^2)$	$g_{m2}'^2 = g_{m2}^2 + \frac{D_{m-1}}{\beta_m} \cdot \frac{A \cdot W_m}{l_{2m+1}} (k' - g_{m2}^2)$		
検 算	最終段階の	$\gamma_m = C_{m-1} \left(\frac{l_{2m+2}}{A} \right)$	$\delta_m = D_{m-1} (l_{2m+1}^{-1} \cdot l_{2m+2})$	D_{m-1}
	検算	$d' = \gamma_m (g_m'^2 - k') (g_m'^2 - g_{m2}^2) + \delta_m (g_m'^2 - k')^2 - D_{m-1} (g_{m2}^2 - g_m'^2) (g_m'^2 - g_{m2}^2)$		
		$Z_{2m+1} = \frac{B_m}{d'} (g_{m2}^2 - g_m'^2)$	$\eta = \frac{1}{d'} (g_{m2}^2 - g_m'^2)$	
算	総括検算	$\frac{Z_{2m+1}}{\eta^2} = \frac{1}{A} \left[l_{2m+2} + \frac{1}{l_{2m+1}^{-1} + l_{2m} + l_{2m-1}^{-1} + l_{2m-2} + \dots + l_2} \right] \quad (\text{連分数})$		

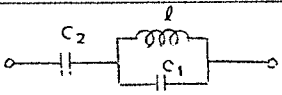
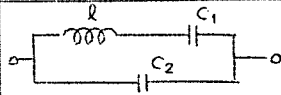
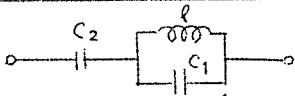
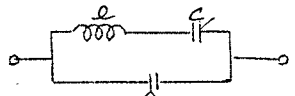
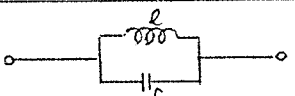
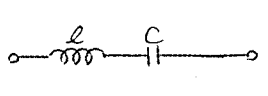
※ 次式で計算してもよい。

$$g_{m2}'^2 - g_{m2}^2 = \frac{B_{m-1} \cdot (l_{2m+1}^{-1} \cdot l_{2m+2})}{\beta_m} \cdot \frac{(k' - g_{m2}^2)^2}{g_{m2}'^2 - g_{m2}^2}$$

(vi) インピーダンス関数と素子値の関係

以上述べた計算過程で三次インピーダンス展開は終了するわけであるが、最後に三次インピーダンス関数を L 及び C に分解しなければならない。それは第3.13表から計算される。

第3.13表 三次インピーダンス関数の素子値

	$Z(p) \cdot Y(p)$	並列同調型	直列同調型
直列インピーダンス	$Z = \frac{Z}{p} \cdot \frac{p^2 + g'^2}{p^2 + g^2}$ $(g^2 > g'^2)$ <p>直列同調 $f = f_p \cdot g'$ 並列同調 $f = f_p \cdot g$</p>	 $C_2 = \frac{1}{Z} \cdot \frac{g^2}{g'^2}$ $C_1 = \frac{1}{Z} \cdot \frac{g^2}{g'^2 - g^2}$ $l = \frac{1}{C_1} \cdot \frac{1}{g^2}$	 $C_2 = \frac{1}{Z}$ $l = Z \cdot \frac{1}{g'^2 - g^2}$ $C_1 = \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{g'^2}$
並列インピーダンス	$Y = y p \cdot \frac{p^2 + g'^2}{p^2 + g^2}$ $(g'^2 > g^2)$ <p>直列同調 $f = f_p \cdot g$ 並列同調 $f = f_p \cdot g'$</p>	 $C_2 = y \cdot \frac{g'^2}{g^2}$ $C_1 = y \cdot \frac{g'^2}{g'^2 - g^2}$ $l = \frac{1}{C_1} \cdot \frac{1}{g'^2}$	 $C_2 = y$ $l = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{g'^2 - g^2}$ $C_1 = \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{g'^2}$
両端直・並列腕	$Y = y \cdot \frac{p^2 + g^2}{p}$ <p>or</p> $Z = Z \cdot \frac{p^2 + g^2}{p}$ <p>並列 } 同調 $f = f_p \cdot g$ 直列 }</p>	 $Y = y \cdot \frac{p^2 + g^2}{p}$ $C = y$ $l = \frac{1}{y \cdot g^2}$	 $Z = Z \cdot \frac{p^2 + g^2}{p}$ $l = Z$ $C = \frac{1}{Z \cdot g^2}$
実際の素子値 $R\Omega, f_p \text{ c/s}$		$L = \frac{R}{2\pi f_p} \cdot l$ <p>(ヘンリー)</p>	$C = \frac{1}{2\pi f_p R} \cdot C$ <p>(ファラッド)</p>

3.3.4 設 計 例

(設 計 例 その1)

本設計例は第3.2.3図に示されている様に下部阻止域側の減衰量特性が極めて急峻な遮断特性を示すもので、上部阻止域は極めてゆるやかな減衰特性でよい。この様な帯域濾波器の設計は本研究の構成論によらねば不可能である。諸外国におけるこの種の濾波器の設計はほとんど映像パラメータ設計法によっており、素子数を多く使う上通過帯域内の特性が良好でない。又第1章に於て述べた様に直交関数近似によって設計しているところもあるが、この例の様に急峻な遮断特性のものに対しては通過帯域の端における収束が不良である。

本例は帯域濾波器設計に本理論が如何に適用しているものであるかを知らすものであろう。その濾波器の近似と構成の大要について述べる。

先ず要求された伝送量規格から次のパラメータが決定された。

$$k' = 0.6625$$

$$\begin{array}{ll} m_{-4}^2 = 8.110\ 8910\ 8910\ 8910\ 891 & Q_{-4}^2 = 0.140\ 6293\ 5115\ 5666\ 944 \\ m_0^2 = 2.278\ 3908\ 8643\ 6454\ 253 & Q_0^2 = 0.783\ 2333\ 6118\ 0729\ 602 \\ m_{-3}^2 = 18.60\ 9985\ 1705\ 3880\ 375 & Q_{-3}^2 = 0.056\ 7859\ 6491\ 2280\ 702 \\ m_{-2}^2 = 41.65\ 2339\ 2925\ 0665\ 652 & Q_{-2}^2 = 0.024\ 5988\ 3040\ 9356\ 725 \\ m_{-1}^2 = 63.59\ 5802\ 4311\ 2265\ 388 & Q_{-1}^2 = 0.015\ 9755\ 1211\ 3617\ 377 \\ m_1^2 = 0.700\ 1893\ 5409\ 2152\ 324 & Q_1^2 = 3.335\ 4385\ 9669\ 1228\ 051 \\ m_2^2 = 0.924\ 1877\ 2563\ 1768\ 953 & Q_2^2 = 13.19\ 0476\ 1904\ 7619\ 043 \end{array}$$

公式(2.2.8)によって基準面における特性関数 $h^*(\lambda)$ が求められる。

$$\begin{aligned} h^*(\lambda) &= R_a \left[(m_0 \lambda + \sqrt{1+\lambda^2})^2 (\lambda + \sqrt{1+\lambda^2})^2 \prod_{\nu=1}^4 (m_{-\nu} \lambda + \sqrt{1+\lambda^2})^2 \prod_{\nu=1}^2 (m_{\nu} \lambda + \sqrt{1+\lambda^2})^2 \right] \\ &= \lambda^{16} : 1.0 \\ &\quad \lambda^{14} : 2.646\ 4286\ 6262\ 2754\ 800 \\ &\quad \lambda^{12} : 2.565\ 5543\ 7002\ 4170\ 235 \\ &\quad \lambda^{10} : 1.122\ 0309\ 3713\ 7005\ 079 \\ &\quad \lambda^8 : 2.226\ 2346\ 0587\ 6345\ 418 \times 10^{-1} \\ &\quad \lambda^6 : 1.831\ 8162\ 1541\ 1941\ 816 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

$$\lambda^4 : 5.311\ 7042\ 0152\ 1429\ 437 \times 10^{-4}$$

$$\lambda^2 : 3.964\ 6025\ 5327\ 9261\ 137 \times 10^{-6}$$

$$\lambda^0 : 3.269\ 6630\ 6344\ 6659\ 985 \times 10^{-9}$$

さて $h^*(\lambda)$ より基本方程式 $G(x)$ を式 (2.2.18) によって計算する。

$$G(x) = [h^*(\lambda) \cdot h^*(-\lambda)]_{\lambda^2 = -x} + H^{*-2} [(Q_0^2 + x) \prod_{\nu=1}^9 (Q_\nu^2 + x) \prod_{\nu=1}^2 (Q_\nu^2 - x)]^2$$

基本方程式 $G(x)$ の係数 (16 次方程式) (但し $\bar{5}.29\dots = -5.29\dots$)

次数	係数
16	1.0
15	$\bar{5}.292\ 8569\ 2524\ 5509\ 600$
14	$\bar{12}.13\ 4692\ 4385\ 6200\ 315$
13	$\bar{15}.82\ 3176\ 9025\ 3177\ 232$
12	$\bar{12}.96\ 6092\ 1385\ 5027\ 909$
11	$\bar{6}.972\ 2825\ 8171\ 8881\ 673$
10	$\bar{2}.499\ 2288\ 3456\ 0263\ 881$
9	$\bar{5}.962\ 1085\ 7407\ 2656\ 214 \times 10^{-1}$
8	$\bar{9}.361\ 2942\ 0364\ 8923\ 226 \times 10^{-2}$
7	$\bar{9}.300\ 0740\ 9516\ 2827\ 648 \times 10^{-3}$
6	$\bar{5}.922\ 4306\ 9968\ 8600\ 581 \times 10^{-4}$
5	$\bar{2}.021\ 7830\ 4798\ 6487\ 686 \times 10^{-5}$
4	$\bar{4}.817\ 6820\ 2631\ 8370\ 957 \times 10^{-7}$
3	$\bar{2}.705\ 1914\ 2140\ 0375\ 751 \times 10^{-9}$
2	$\bar{4}.806\ 6921\ 9934\ 4295\ 774 \times 10^{-11}$
1	$\bar{2}.468\ 6454\ 4074\ 9998\ 320 \times 10^{-13}$
0	$\bar{1}.069\ 0696\ 5484\ 6739\ 728 \times 10^{-15}$

$G(x)$ を因数分解した結果は次の通りである。

$$G(x) = \prod_{\mu=1}^6 (x^2 + p_\mu x + q_\mu)$$

P_{μ}	q_{μ}
- 0.005 6654 1460 4501 362	0.000 1688 4824 8995 330
0.005 0900 2991 5284 738	0.000 0163 0489 2155 292
- 0.039 4696 7041 1144 02	0.001 6284 0026 7370 651
- 0.135 0009 3152 0641 1	0.012 2849 0239 5743 03
- 0.394 3786 3221 4336	0.073 8239 2306 4958 4
- 0.937 0055 3954 1525 5	0.302 1734 3493 0146 3
- 1.647 9665 2660 2342	0.753 1823 0289 1002 8
- 2.138 4602 4026 9660	1.155 3275 4151 7630

$G(x)$ の因数分解から式 (2.2.21) により p 平面における $g(p)$ が求められる。それを次に示す。

$g(p)$	
次数	係数
16	1.0
15	0.667 2751 7651 5299 996
14	5.218 7725 5079 7440 123
13	2.908 6401 8960 4781 518
12	11.56 7493 1900 1362 4636
11	5.310 6984 7592 3877 424
10	14.24 9712 9914 3693 3606
9	5.273 2003 6228 7514 328
8	10.69 2468 3673 1753 5706
7	3.080 7141 6634 0127 640
6	5.014 7584 2727 8679 379
5	1.060 8508 2316 4668 935
4	1.438 3594 6637 5058 428
3	0.199 7039 8812 5554 308
2	0.231 0882 6360 9699 685
1	0.015 8784 6904 8745 471
0	0.015 9467 3136 2562 379

又 (2.2.24) から, p 平面における特性関数 $h(p)$ は次の様に求められる。

次数	係 数
16	1.0
14	4.996 1444 7019 9736 326
12	10.76 3993 4647 0896 2656
10	13.06 7069 8748 2938 1534
8	9.782 8216 1638 9977 092
6	4.628 1532 6068 3690 017
4	1.352 1077 4271 7835 324
2	0.223 1830 1413 8594 251
0	0.015 9467 3136 2543 862

p 平面におけるこの帯域濾波器の減衰極は次の如く与えられている。

$$\begin{array}{ll}
 g_{-4} = 0.6 & g_{-4}^2 = 0.36 \\
 g_{-3} = 0.6380 & g_{-3}^2 = 0.40704400 \\
 g_{-2} = 0.6520 & g_{-2}^2 = 0.42510400 \\
 g_{-1} = 0.6557 & g_{-1}^2 = 0.42994249 \\
 g_1 = 1.5200 & g_1^2 = 2.31040000 \\
 g_2 = 2.800 & g_2^2 = 7.8400000
 \end{array}$$

従ってこの帯域濾波器の縦続マトリックス \mathbf{L} は次の如く求まる。

$$\mathbf{L} = \frac{H^{-1}}{p^2(p^2+g_{-3}^2)(p^2+g_{-2}^2)(p^2+g_{-1}^2)(p^2+g_1^2)(p^2+g_2^2)} \begin{bmatrix} G+h & U \\ U & G-h \end{bmatrix}$$

次数	$U(p)$	次数	$G(p) - h(p)$
15	0.667 2751 7651 5299 996	16	0
13	2.908 6401 8960 4781 518	14	0.222 6280 8059 7703 797
11	5.310 6984 7529 3877 424	12	0.803 7997 2530 4661 980
9	5.273 2003 6228 7514 328	10	1.182 6431 1660 7552 072
7	3.080 7141 6634 0127 640	8	0.909 6467 5092 7558 614
5	1.060 8508 2316 4668 935	6	0.386 6051 6659 4989 362
3	0.199 7039 8812 5554 308	4	0.086 2517 2365 7223 104
1	0.015 8784 6904 8745 471	2	0.007 9052 4947 1105 434
		0	0.000 0000 0000 0018 517

次数	$G(p) + h(p)$
16	2.0
14	10.214 9170 2099 7176 449
12	22.331 1866 5472 2587 292
10	27.316 7828 6626 6315 14
8	20.475 2899 8370 7512 798
6	9.642 9116 8796 2369 396
4	2.790 4672 0909 2893 752
2	0.454 2712 7774 8293 936
0	0.031 8934 6272 5106 241

さてかくして求まった縦続マトリックスを展開して回路を実現するのに次の順序によった。(第3.3節 最小線輪数回路構成法による)

$$(1) Z_s = \frac{U}{G-h} \rightarrow \infty \quad (p \rightarrow \infty)$$

第3.3節式(3.3.7)によって直列インダクタンス l_1 を抽出する。

$$l_1 = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{U}{p(G-h)} \right)$$

$$l_1 = 2.997 \ 2642 \ 0280 \ 7767 \ 113$$

残留マトリックスの第1行は夫々次の如く変り次数が2次低下する。

$$\begin{cases} a(p) = (G + h) - l_1 \cdot p \cdot U & 14 \text{ 次多項式} \\ b(p) = U - l_1 p (G - h) & 13 \text{ 次多項式} \end{cases}$$

$$(2) \quad Z_s = \frac{b(p)}{G - h} \rightarrow \infty \quad (p \rightarrow 0)$$

第3章(定理7)の証明における分解(2)の場合であって式(3.2.13)によって直列キャパシテイ C_1 を求め下部阻止減衰極を定める。本例に於ては次に分離すべき下部阻止減衰極として (g_{-1}^2) が定まった。

$$C_1^{-1} = \left[p \cdot \frac{b(p)}{G - h} \right]_{p^2 = -g_{-1}^2}$$

$$= 1.124 \ 9250 \ 1731 \ 4896 \ 201$$

残留マトリックスの第1行は夫々次の様になる。

$$a'(p) = a(p) - C_1^{-1} \frac{U}{p}$$

$$b'(p) = b(p) - C_1^{-1} \cdot \frac{(G - h)}{p}$$

さて $b'(p)$ は $(p^2 + g_{-1}^2)$ の因数をもつ 13 次多項式であるから

$$b'(p) = (p^2 + g_{-1}^2) \eta_2(p)$$

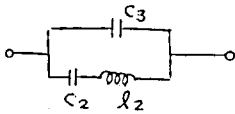
とすれば $\eta_2(p)$ は 10 次多項式である。又 $\xi_2(p) = \frac{(G - h)}{p}$ とおけば 2 つの多項式 $\eta_2(p)$ (10 次), $\xi_2(p)$ (13 次) により次の分解の計算は第3章第2節第3.7表の $\nu = 1$ の場合として計算すればよいことになる。

	$\eta_2(p)$ (10 次式)		$\xi_2(p)$ (13 次)
11	0.249 0001 4930 1249 589	14	0.222 6280 8059 7703 797
9	0.754 7344 3308 2043 865	12	0.803 7997 2530 4661 980
7	0.891 8714 8865 6824 234	10	1.182 6431 1660 7552 072
5	0.515 2185 0425 3688 14	8	0.909 6467 5092 7558 614
3	0.145 9154 6907 7603 291	6	0.386 6051 6659 4989 362
1	0.016 2478 8503 8260 852	4	0.086 2517 2365 7223 104
		2	0.007 9052 4947 1105 434

この時分離すべき減衰極は構成素子の値の分布が著しく広がらないために g_{-1}
 $\rightarrow g_1 \rightarrow g_2 \rightarrow g_2 \rightarrow g_{-3}$ の順序とした。これは互に対応する番号の減衰極
 を選んだものである。この順序で分離しても負素子を生ずる事はなかった。

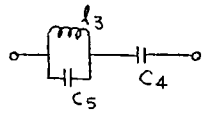
さて第3.3節 3.3.2 における第3.7表の計算を機械的に遂行して次の値
 を得た。

i) $\nu = 1$ y_2 の分離 ;

	数 値	備 考
B_1	$4.692\ 0690\ 9913\ 6227\ 266 \times 10^{-7}$	y_2 の素子値 
α_2	$\overline{2.817\ 0470\ 0720\ 8216\ 308}$	
α_2^1	$0.000\ 0000\ 1257\ 8702\ 319$	
β_2	$1.838\ 3286\ 5127\ 4394\ 664$	
β_2^1	$\overline{3.456\ 8984\ 4893\ 0196\ 603}$	
y_2	$0.829\ 1622\ 5664\ 5157\ 452$	
g_{-1}^2	$0.462\ 2744\ 4125\ 4311\ 356$	
		$l_2 = 37.30\ 1694$ $C_2 = 0.062\ 3535$ $C_3 = 0.829\ 1623$

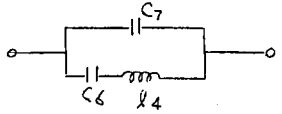
$$\begin{cases} l_3 = l_2 & : 10 \text{ 次} \\ \xi_3 = \overline{\xi_2} - y_2 [(p^2 + g_{-1}^2) \overline{l_2} + \beta_2] & : 9 \text{ 次} \end{cases}$$

ii) $\nu = 2$ Z_3 の分離 :

	数 値	備 考
A_2	$\overline{0.137\ 9343\ 0472\ 5266\ 55}$	Z_3 の素子値 
α_3	$\overline{0.073\ 1628\ 6726\ 0638\ 321}$	
α_3^1	$0.000\ 0006\ 4373\ 0254\ 166$	
β_3	$1.833\ 6109\ 7558\ 6975\ 412$	
β_3^1	$\overline{3.456\ 8984\ 4893\ 0196\ 603}$	
Z_3	$14.10\ 8193\ 8695\ 6125\ 619$	
g_{-1}^2	$0.533\ 9912\ 1323\ 8549\ 703$	
		$l_3 = 4.695\ 0474$ $C_4 = 0.306\ 6773$ $C_5 = 0.092\ 1877$

$$\begin{cases} \xi_4 = \xi_3 & : 9 \text{ 次} \\ l_4 = \overline{l_3} - Z_3 [(p^2 + g_{-1}^2) \overline{\xi_3} + \alpha_3] & : 6 \text{ 次} \end{cases}$$

iii) $\nu = 3$ y_4 の分離 :

	数 値	備 考
B_2	9.193 3061 6580 2380 72×10^{-6}	y_4 の素子値 
α_4	3.011 0594 2775 6045 704	
α_4^1	0.000 0006 4373 0254 166	
β_4	1.082 0.610 8731 6199 945	
β_4^1	3.023 3612 3479 0375 905	
y_4	0.758 6380 4798 9633 628	
g_2^2	0.517 4031 2350 0174 603	
		$l_4 = 14.28 \ 1302$ $C_6 = 0.164 \ 7165$ $C_7 = 0.758 \ 6380$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \eta_5 = \eta_4 & : 6 \text{ 次} \\ \xi_5 = \bar{\xi}_4 - y_4 [(p^2 + g_2^2) \bar{\eta}_4 + \beta_4] & : 5 \text{ 次} \end{array} \right.$$

	数 値	備 考
A_3	1.579 6232 6359 7531 419 $\times 10^{-2}$	
α_5	0.002 1247 8025 3181 138	
α_5^1	0.000 0028 3450 4411 100	
β_5	1.079 4341 0441 1585 821	
β_5^1	3.023 3612 3479 0375 905	
Z_5	69.51 9777 7583 3773 357	
g_2^2	0.533 7513 2671 6468 728	

$$\left\{ \begin{array}{ll} \xi_6 = \xi_5 & : 5 \text{ 次} \\ \eta_6 = \bar{\eta}_5 - Z_5 [(p^2 + g_2^2) \bar{\xi}_5 + \alpha_5] & : 2 \text{ 次} \end{array} \right.$$

ここで得られた残留多項式は次の如くなっている。

	ξ_6		η_6
5	0.000 2964 0939 1482 495	2	0.000 3129 4359 4597 358
3	0.000 3197 2104 0388 230	0	0.000 1498 3091 9101 518
1	0.000 0838 6449 9512 589		

(3) $Z_s = \frac{Z_6 \cdot (p^2 + g_{-3}^2)}{\xi_6}$ から g_{-3}^2 を分離する。

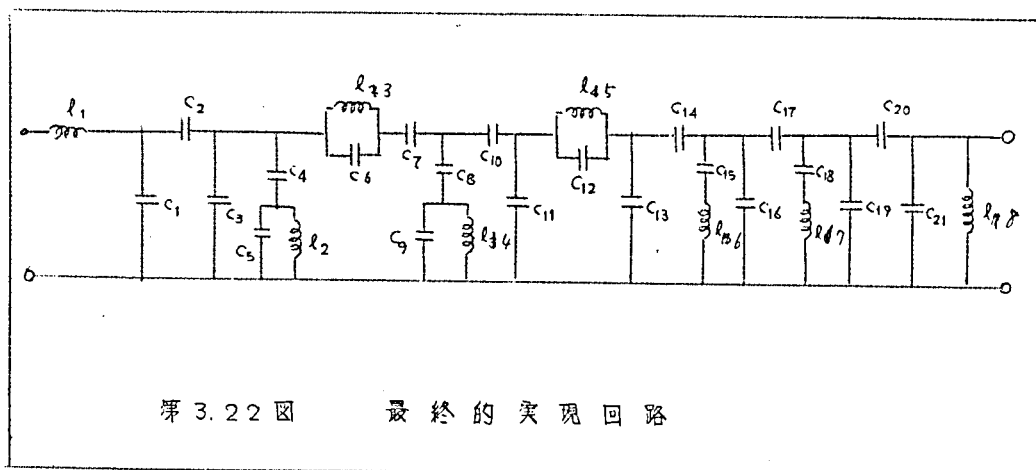
上の計算を遂行した後、残留マトリックスの第1行は $(p^2 + g_{-3}^2)$ を共通根として持っているから第3章第1節の分解(3)によって並列アドミッタンス腕を分離する事が出来る。従って式(3.2.18)から

$$l_6^{-1} = 0.126 \ 2635 \ 2736 \ 2258 \ 237$$

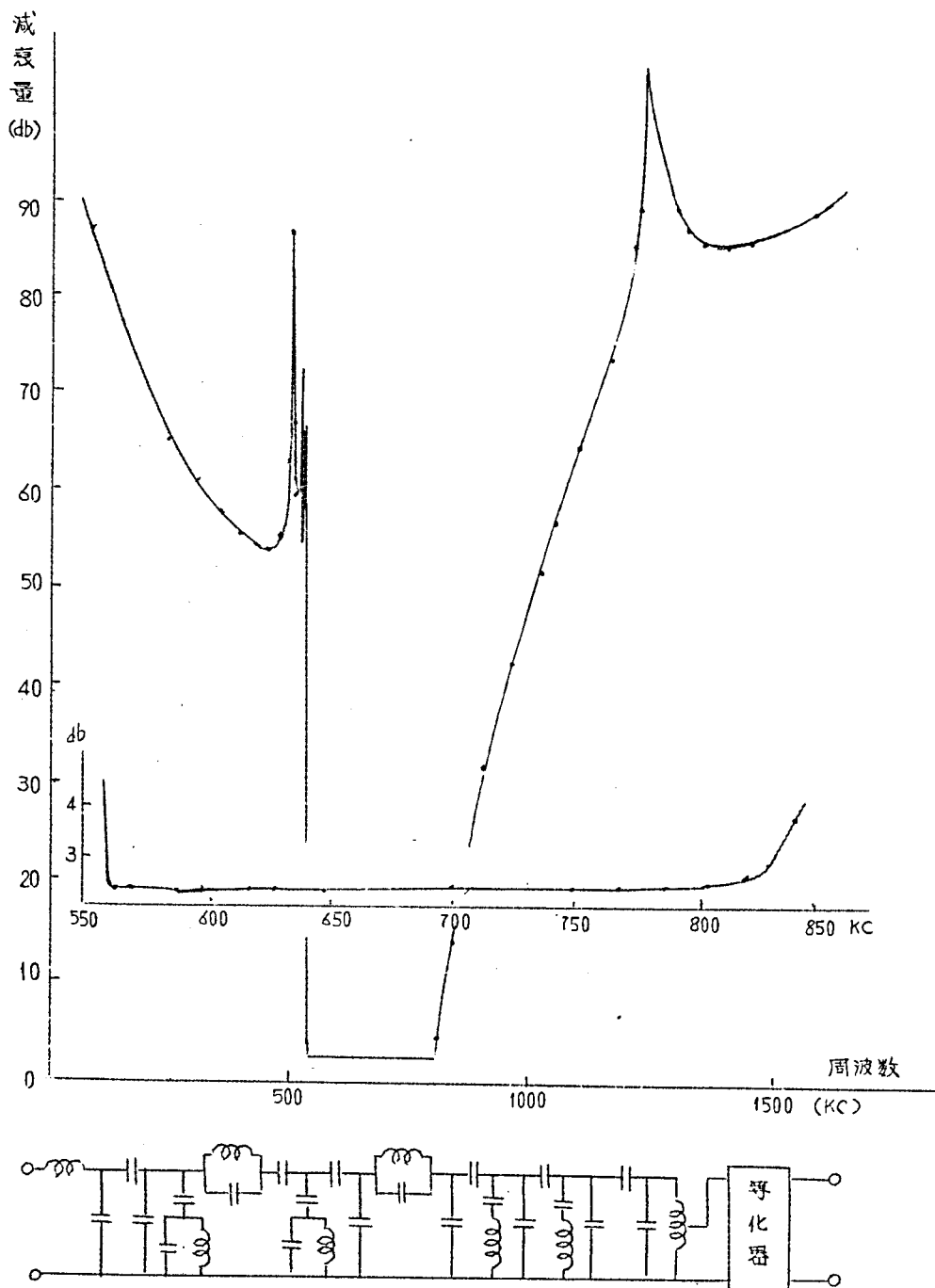
と求められる。残留マトリックスの第2列の要素は次の様になる。

$$\begin{cases} Z_7 = Z_6 & : \text{2次} \\ \xi_7 = \xi_6 - l_6^{-1} \bar{Z}_6 & : \text{3次} \end{cases}$$

これから残りの回路が容易に求まる。以上は Z_s について解いたから最終並列腕が求められない。実際にはマトリックスの各要素全部について計算を行わねばならないが、計算精度を向上するためには L について行った計算を同時に L^{-1} についても行って両者が一致する様にする事が大切である。本例に於ては L 及び L^{-1} について丁度半分だけ実現して全体の回路を構成する事により計算桁数を補い精度を高めた。そのとき生ずる理想変圧器は理想変圧器変換によって完全に実現出来た。その最終的実現回路と規準化された素子値とを第3.22図及び第3.14表に示す。又動作特性の実測値を第3.23図に示す。図に見られる様に極めて良好な帯域濾波特性が実現出来ている。



C _i		l _i	
1	0.265 0326	1	2.997 2642
2	0.623 9155		
3	0.179 1918		
4	0.073 9579		
5	0.104 12	2	13.06 1085
6	0.151 0707		
7	0.045 4121	3	9.531 0619
8	0.120 8873		
9	0.059 2176	4	13.06 1085
10	1.353 9052		
11	0.443 3111		
12	0.013 3827	5	9.531 0619
13	0.033 6879		
14	0.170 0557		
15	0.188 0959	6	13.06 1085
16	0.401 8561		
17	0.429 9338		
18	0.212 6759	7	13.06 1085
19	0.048 9275		
20	0.165 4841		
21	0.105 1967	8	7.201 2467



第3.23 図 設計例(その1) の実際の回路構成と動作減衰特性(実測)

(設計例 そのⅡ)

本設計例に於ては連立チエビシエフ特性の低域濾波器を基準として得られる対称減衰特性帯域濾波器の最小線輪数回路構成を3次インピーダンス展開法によって行った例を述べる。

設計された帯域濾波器は、群通過濾波器であつて、従来この様な急峻な遮断特性を有する濾波器は設計不能であると思われていたのであるが、本研究の成果の一つとして、この例にみられる様に極めて優秀な特性が実現出来たのである。

濾波器に課せられた規格

$$\left\{ \begin{array}{ll} 60.6 \text{ kc} \sim 107.2 \text{ kc} & \text{にて 偏差 } 1 \text{ db 以内} \\ 60.15 \text{ kc} \text{ と } 63.2 \text{ kc} & \text{との 偏差 } 1 \text{ db 以内} \\ 107.2 \text{ kc} \sim 107.7 \text{ kc} & \text{偏差 } 1 \text{ db 以内} \end{array} \right.$$

基準となる低域濾波器のパラメーターを次の如く定めた。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{帯域係数 } \left(\frac{f_{+P} - f_{-P}}{f_{+s} - f_{-s}} \right)^2 = R^2 = 0.96 \\ \text{次数 } N = 16 \end{array} \right.$$

$$\text{帯域濾波器の帯域係数 } \frac{f_{-P}}{f_{+P}} = R' = 0.557217411$$

が3.24(a)は基準低域濾波器と変換後の帯域濾波器の回路構成と示している。

基準低域濾波器の素子値から3次インピーダンス展開によってこの濾波器素子を求める操作を表第3.15 ~ 3.18 に示している。計算は 3.3.3 において述べた諸公式に従って行われたものである。

実際の回路構成を次の図 3.24 (b) に示す。

実測された動作特性及びその温度特性を第3.25 図に示す。又この濾波器の実装の様子を写真に示す。又第3.27 図はこの濾波器のみを実装した G-1 形「」番 NA 群通過濾波器架の外観を示している。

三次インピーダンス展開の準備計算

(基準低域波器の素子値)

第 3.15 表

ν	$l_{2\nu+1}^{-1}$	$l_{2\nu+2}$	Q^2	Q	$l_{2\nu+1}^{-1} l_{2\nu+2}$	$l_{2\nu+1}/A$	$l_{2\nu+2}/A$
0	0.863 1965 188	0.862 6844 166					
1	0.331 5560 931	0.543 3703 381	1.077 6495 37	1.038 0990 02	0.180 1577 46	6.759 5824 95	1.217 7911 49
2	0.363 3606 230	1.018 1913 721	1.037 3714 87	1.018 5143 53	0.369 9706 51	6.167 9241 54	2.281 9509 17
3	2.521 0577 135	0.939 2992 045	1.974 7201 77	1.405 2473 72	2.368 0275 05	0.888 9843 15	2.105 1393 08
4	0.260 6112 551	1.136 7534 329	1.012 3529 15	1.006 1575 00	0.296 2507 39	8.599 7082 65	2.547 6699 27
5	7.154 6897 323	1.158 5353 688	4.468 2436 32	2.113 8220 44	8.288 9611 09	0.313 2463 95	2.596 4871 83
6	0.283 8553 674	0.746 3240 260	1.019 3198 78	1.009 6137 27	0.211 8480 81	7.295 5025 00	1.672 6470 50
7	1.251 7271 824	1.080 8797 376	1.381 0865 49	1.175 1963 87	1.352 9665 49	1.790 4706 36	2.422 4468 77
8	0.377 5952 811	0.048 5722 657	1.167 5207 67	1.080 5187 49	0.018 3406 58	5.935 4045 89	0.108 8592 27
ν	$g_{\nu 1}^2$	$g_{\nu 2}^2$	$g_{\nu 1}^2 - g_{\nu 2}^2$	$g_{\nu+1 1}^2 - g_{\nu 1}^2$	$g_{\nu+1 1}^2 - g_{\nu 2}^2$	$g_{\nu 1}^2 - k'$	$(g_{\nu 1}^2 - k')^2$
1	1.022 0868 12	0.300 0741 02	0.722 0127 10	0.011 4051 03	0.710 6076 07	0.468 2801 83	0.219 2863 298
2	1.010 6817 09	0.303 4603 07	0.707 2214 02	0.246 0233 59	0.953 2447 61	0.456 8750 80	0.208 7348 387
3	1.256 7050 68	0.244 0523 16	1.012 6527 52	0.253 1633 17	0.759 4894 35	0.702 8984 39	0.494 0662 155
4	1.003 5417 51	0.305 6193 55	0.697 9223 96	0.826 0098 62	1.523 9322 58	0.449 7351 22	0.202 2616 800
5	1.829 5516 13	0.167 6376 77	1.661 9139 36	0.824 0171 65	0.837 8967 71	1.275 7449 84	1.627 5252 64
6	1.005 5344 48	0.305 0137 00	0.700 5207 48	0.099 4836 69	0.800 0044 17	0.451 7278 19	0.204 0580 225
7	1.105 0181 17	0.277 5536 23	0.827 4644 94	0.057 8524 06	0.769 6120 88	0.551 2114 88	0.303 8341 05
8	1.047 1657 11	0.292 8875 33	0.754 2781 78			0.493 3590 82	0.243 4031 838
ν	$k' - g_{\nu 2}^2$	$(k' - g_{\nu 2}^2)^2$	帯域変換のパラメーター $\left\{ \begin{array}{l} f+p = 108.1 0923 45 \\ f-p = \\ k' = 0.553 8066 29 \\ A = 0.446 1933 71 \end{array} \right.$				
1	0.253 7325 27	0.064 3801 9526					
2	0.250 3463 22	0.062 6732 8094					
3	0.309 7543 13	0.095 9477 3442					
4	0.248 1872 74	0.061 5969 2298					
5	0.386 1689 52	0.149 1264 5949					
6	0.248 7929 29	0.061 8979 2152					
7	0.276 2530 06	0.076 3157 2332					
8	0.260 9190 96	0.068 0787 7466					

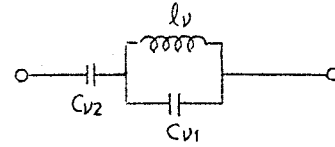
三次インピーダンス展開の計算 (第3.10表による)

ν	1	2	3	4
$A_{\nu-1}$	1.0	0.703 5675 98	0.666 1611 16	0.717 9911 56
$B_{\nu-1}$	1.933 4317 20	1.914 5511 11	2.777 9720 85	2.037 5954 08
$C_{\nu-1}$	1.104 4991 38	0.874 8164 27	0.441 0096 39	0.926 4857 63
$D_{\nu-1}$	2.135 4736 68	2.380 5541 46	1.839 0633 09	2.629 2846 66
Γ_{ν}	1.894 3551 31	0.546 5375 60	0.059 5657 99	1.133 3653 02
$\delta_{\nu 1}^2 - \delta_{\nu 1}'^2$	0.161 7908 52	0.386 0607 36	0.770 3642 30	0.248 3007 72
$\delta_{\nu 1}^2$	0.860 2959 60	0.624 6209 73	0.486 3408 38	0.755 2409 79
$Z_{2\nu-1}$	0.410 0631 22	0.275 8710 61	1.224 4538 12	0.289 9178 88
α	3.499 5455 70	4.228 3855 57	10.75 8648 34	4.470 4390 29
β	3.865 2450 65	5.257 5774 61	7.122 4025 34	5.768 5921 07
B	1.914 5511 11	2.777 9720 85	2.037 5954 08	
W	2.721 2042 21	4.170 1204 30	2.837 9115 76	4.681 4365 62
$\delta_{\nu}^2 - \delta_{\nu 2}'^2$	0.113 5501 79	0.136 9931 70	0.229 7731 84	0.135 0652 19
δ_{ν}^2	0.413 6242 81	0.440 4534 77	0.473 8255 00	0.440 6845 74
γ_{ν}	1.345 0492 74	1.996 2881 48	0.928 3867 26	2.360 3799 16
δ_{ν}	0.384 7221 23	0.880 7351 67	4.354 9524 99	0.778 9275 25
d_{ν}	0.024 7684 85	0.055 1985 63	0.417 8478 26	0.047 9795 39
d'_{ν}	0.499 6800 79	2.331 0116 28	0.844 3425 54	9.166 3533 58
Γ_{ν}'	3.836 7570 76	7.087 4751 02	0.876 5093 97	18.57 9044 81
$\delta_{\nu 2}^2 - \delta_{\nu 2}'^2$	0.146 9181 92	0.117 8667 94	0.404 7352 15	0.077 8348 62
$\delta_{\nu 2}^2$	0.446 9922 94	0.421 3270 01	0.648 7875 31	0.383 4542 17
$y_{2\nu}$	0.775 4772 96	1.230 5790 15	2.205 1079 67	1.631 1256 37

第 3.16 表

5	6	7	8
0.597 6842 79	0.638 5592 42	0.494 6022 93	0.533 4690 36
2798 0209 89	1.845 4924 30	1.873 7079 00	1.940 9090 30
0.257 3287 80	1.103 6798 89	0.773 3058 35	0.879 7046 30
1.204 6683 39	3.189 7320 51	2.929 5239 28	3.200 6106 20
0.014 3212 30	1.267 3755 87	0.117 7342 47	0.557 5079 62
1.369 2575 86	0.216 5315 26	0.617 4592 02	0.376 0339 95
0.460 2940 27	0.789 0029 22	0.487 5589 15	0.671 1317 16
2167 0192 30	0.250 5162 18	0.418 1905 65	0.270 3096 04
27.54 2587 719	3.304 5406 92	5.606 9197 91	2.034 5796 06
11.85 8268 229	5.711 5375 75	8.766 3641 12	3.355 0758 91
			1.127 6703 70
2890 0880 28	3.788 3121 37	3.638 2787 08	2.364 4859 73
0.346 9384 75	0.109 8491 21	0.183 9353 95	0.012 0125 27
0.514 5761 52	0.414 8628 21	0.461 4890 18	0.304 9000 60
0.668 1508 79	1.846 0669 10	1.873 2923 05	0.095 7639 66
9.985 4490 11	0.675 7386 14	3.963 5478 79	0.058 7013 05
1.489 0946 57	0.041 8268 16	0.302 4810 23	
1.458 7541 37	1.273 2379 62	1.545 5862 45	0.025 1877 25
0.692 2574 81	4.845 1199 93	1.604 7318 73	
0.495 1355 10	0.136 8670 67	0.295 4669 14	0.099 1568 6
0.662 7731 87	0.441 8807 66	0.573 0205 37	0.392 0443 93
4.697 1399 27	1.484 7637 92	2.867 6014 21	2.975 2274 95
			$Z_{17} = 0.537\ 8084\ 19$
			$\eta = 0.476\ 9198\ 81$

(第 3. 13 表 による 計算)

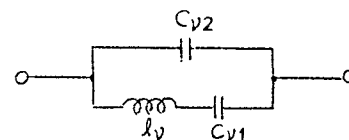


	g^2	g'^2	$g^2 - g'^2$	β_v	C_{v1}	C_{v2}	l_v
1	1.022 0868 12	0.860 2959 60	0.161 7908 52	0.410 0631 22	2897 2714 52	15.40 5759 318	0.063 5080 98
3	1.010 6817 09	0.624 6209 73	0.386 0607 36	0.275 8710 61	2.240 4379 81	3.624 8818 43	0.714 5794 31
5	1.256 7050 68	0.486 3408 38	0.770 3642 30	1.224 4538 12	1.332 2779 80	2.110 3292 58	0.597 2714 89
7	1.003 5417 51	0.755 2409 79	0.248 3007 72	0.289 9178 88	1.134 0116 36	3.449 2525 00	1.167 6076 79
9	1.829 5516 13	0.460 2940 27	1.369 2575 86	2.167 0192 30	0.616 5903 81	1.834 1994 61	0.886 4588 68
11	1.005 5344 48	0.789 0029 22	0.216 5315 26	0.250 5162 18	1.095 4856 12	3.991 7575 37	1.156 9503 19
13	1.105 0181 17	0.487 5589 15	0.617 4592 02	0.418 1905 65	3.028 3560 52	2.391 2543 32	0.677 2764 32
15	1.047 1657 11	0.671 1317 16	0.376 0339 95	0.270 3096 04	2.072 8022 40	3.699 4616 00	0.718 8435 29
17		0.304 9000 60		0.537 8084 19	6.098 3857 75		0.537 8084 19

三次アドミッタンスとその素子値

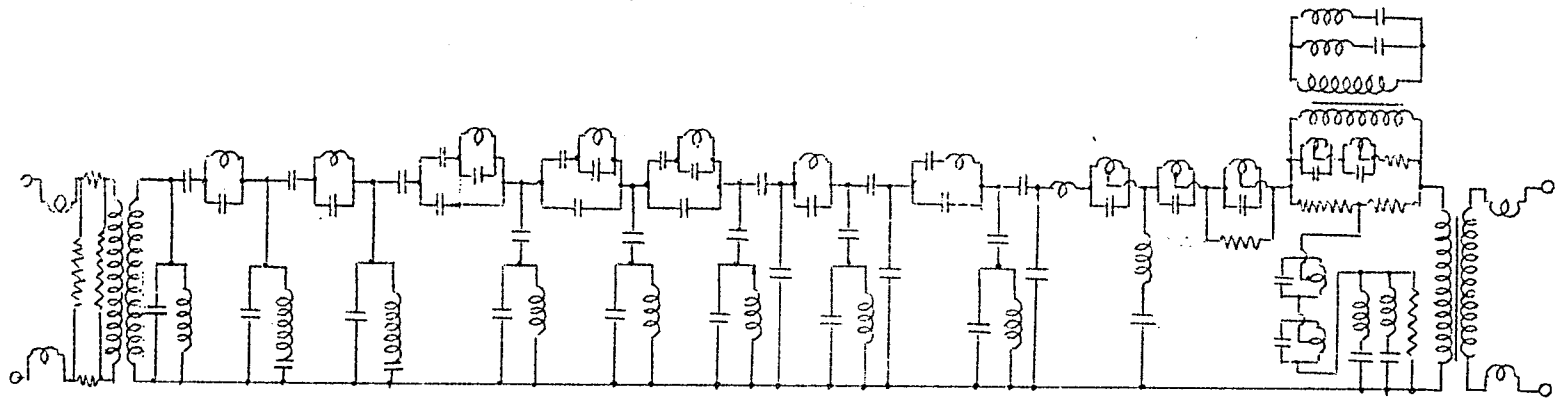
第 3. 18 表

(第 3. 13 表による計算)



	g^2	g'^2	$g'^2 - g^2$	g_v	C_{v1}	C_{v2}	l_v
0		1.290 6979 25		0.830 0802 95		0.830 0802 95	0.933 3731 07
2	0.300 0741 02	0.446 9922 94	0.146 9181 92	0.775 4772 96	2.359 3563 93	1.155 1559 20	0.948 2141 15
4	0.303 4603 07	0.421 3271 01	0.117 8667 94	1.230 5790 15	4.398 8325 41	1.708 5473 02	0.539 5642 61
6	0.244 0523 16	0.648 7875 31	0.404 7352 15	2.205 1079 67	3.656 9406 98	2.205 1079 67	1.120 4672 03
8	0.305 6193 55	0.383 4542 17	0.077 8348 62	1.631 1256 37	8.035 7565 74	2.046 5392 45	0.324 5336 31
10	0.167 6376 77	0.662 7731 87	0.495 1355 10	4.697 1399 27	13.87 3496 77	4.697 1399 27	0.429 9742 31
12	0.305 0137 00	0.44 18807 67	0.136 8670 67	1.484 7637 92	4.793 6189 30	2.151 0134 24	0.472 0971 67
14	0.277 5536 23	0.573 0205 37	0.295 4669 14	2.867 6014 21	3.052 6762 12	2.867 6014 21	1.180 2455 10
16	0.292 8875 33	0.392 0443 93	0.099 1568 60	2.975 2274 95	1.007 2610 91	2.975 2274 95	3.389 6671 59

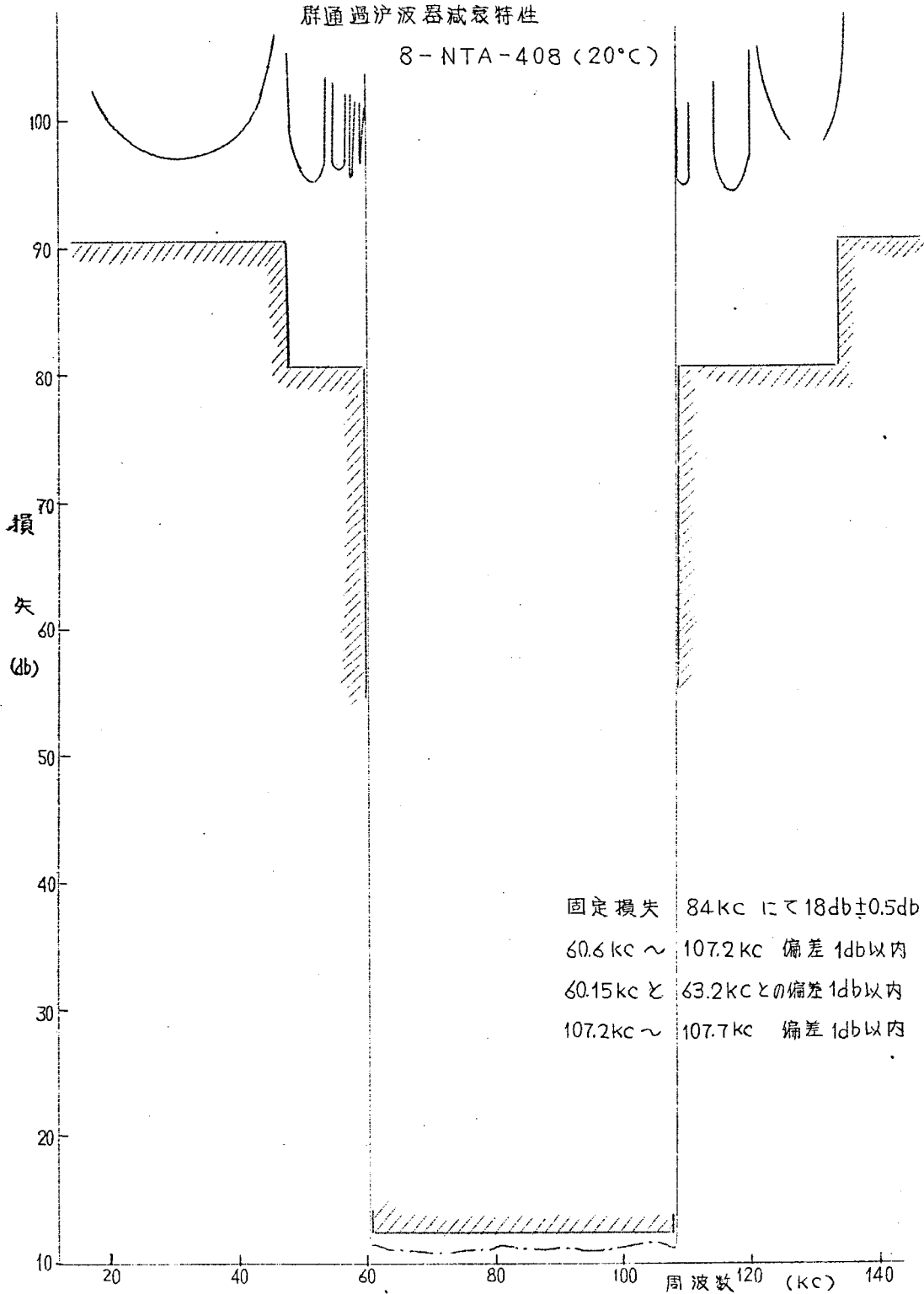
実 際 の 回 路 構 成



第 3. 24 - (b) - 図

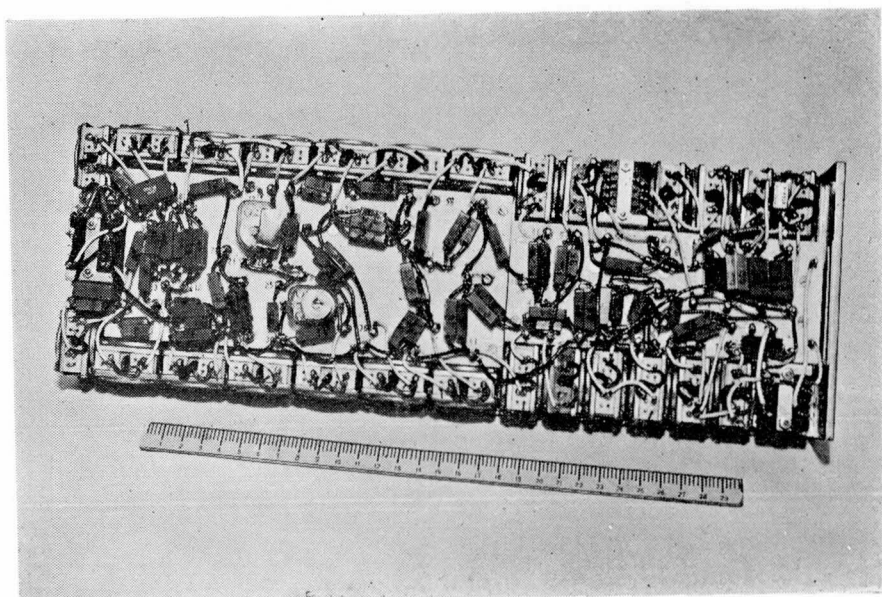
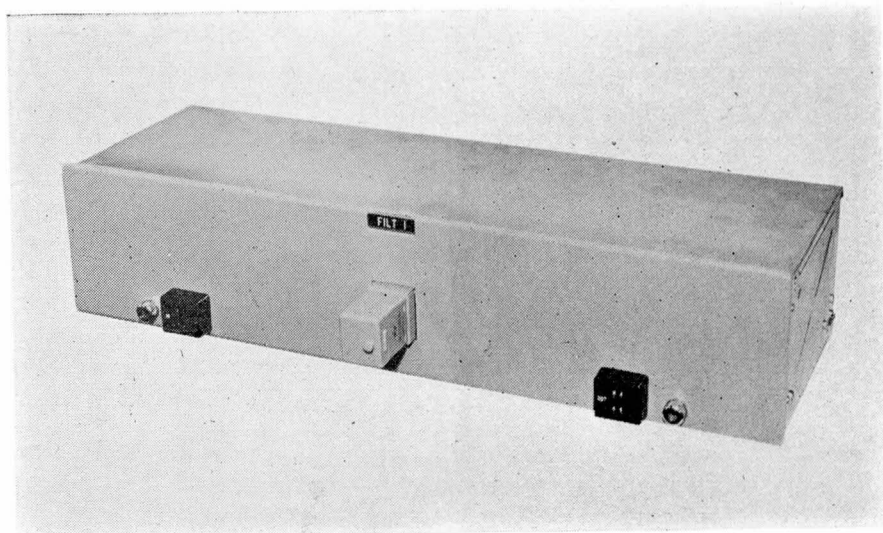
群通過泸波器減衰特性

8-NTA-408 (20°C)

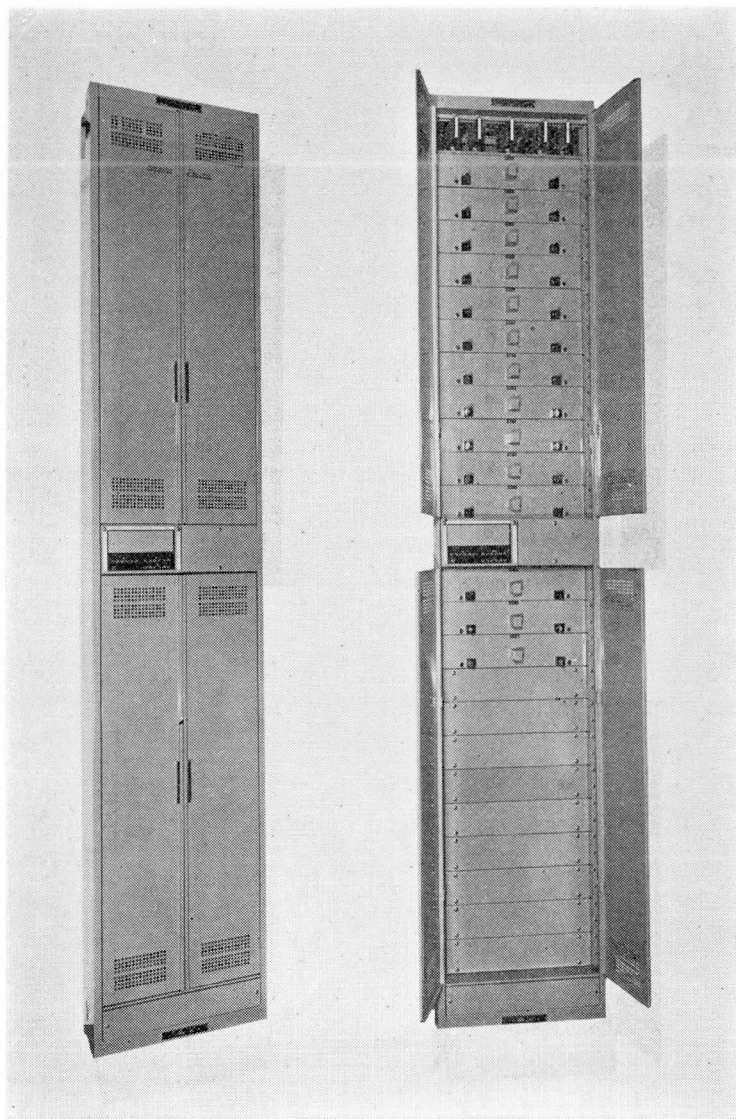


第 3.25 図

群通過泸波器伝送特性



第 3.26 図 群通過濾波器の外観及び内部構造



第3.27图 G-1形「4」号NA群通过泸波器架

3.3.5 第3.3節の結論

既に第3.1節で述べた様に最小線輪回路構成は現今極めて重要な課題であるが、第3.1節の定理をリアクタンス帯域濾波器の場合に適用したのが本節であった。本節に於ては先ず帯域濾波器が最小線輪数梯子回路（荷密に言えば Γ によるカットセット、タイセットを含まない回路）で構成されるための充分条件を導いた。そしてその実際の構成の計算手順も示されている。この定理に基づいて帯域濾波器は全て最小線輪数回路で構成される様になり、通信技術の進歩に大きく貢献した次第である。

本節に於ては更に対称減衰特性帯域濾波器の最小線輪数回路構成の計算法“三次インピーダンス展開法”を述べている。この計算公式は著者の研究になるもので、通常のリアクタンス変換の場合と大きい差異なく計算出来得られた結果は調整操作に便利且小型化、低廉化に適した回路である。

最後にあげられた設計例はいつでも本研究によらなければ従来は全く不可能であったものばかりである。今日では本研究により思いのままに設計が進められる様になったのである。

160 頃欠

第 4 章

回路網位相幾何学に関する研究

本章に於ては、回路網位相幾何学的理論に於ける今日の最大の課題である「如何にして全ての可能な木 (tree) を求めるべきか」⁽³⁴⁾ という問題に極めて有効な方法を提供したものである。

回路網設計の最大のあい路は数値計算にあるところから計算機の研究と共に、これを枝う希望として回路網位相幾何学の研究が盛になって来た。本章は著者が計算機の設計研究と共に進めた回路網位相幾何学の研究特に木及び多木を計算機で有効に求める理論を導いたものである。又 木、多木を求めると同時に、木小行列式、多木小行列式の相対符号も極めて容易に求める定理も導いてある。

従来の方法では例えば J. MacWilliams⁽³¹⁾ のあげた例では 10 個の節点 20 個の枝を有する回路の全ての木を求めるのに 167960 回の計算プロセスを必要としているが、本章の理論では約 5000 回のプロセスを経て全ての木が求まる。これは、系が更に大きくなって来るとその差異が著しく重要となって来る。本章の方法を電子計算機の助けによって実用化するのが今後の課題であるが、本章には更に今後の課題としてこれらの理論を回路網の構成 (著者の言葉では回路網の直接近似) に適用する事をあげ、それに対する研究も述べている。

第4.1節 回路網位相幾何学における木の算出

4.1.1 回路網位相幾何学的理論の検討^{(48) (51)}

電気回路網を接続の状態に注目して解析する事は1843年 G. Kirchhoff⁽²⁹⁾の研究が最初であり、現在まで多くの人によって研究されて、自動計算が普及して来た今日ますます重要な分野となって来た。^{(19)~(37)} その1つの重要な結果は回路の方程式を直接連立方程式の解法によって解くのではなく、幾何学的構造で定まる量を求めて行う事にある。その要旨を回路の節点解析の場合について述べてよう。

既に 3.1.2 に於て述べた様に m 個の節点からなり、 s 個の独立接続部分からなるグラフには $m-s$ 個の独立なカットセットが存在する。この独立なカットセットに対応して $m-s$ 行 n 列の接続行列 (incidence matrix) を次の様に定義する。

$$D = (d_{\lambda i}^i)$$

$$d_{\lambda i}^i = \begin{cases} 1 : \text{枝 } e_{\lambda} \text{ が節点 } P_i \text{ に接続し, } e_{\lambda} \text{ の方向が } P_i \text{ から流れ出る方向の場合} \\ -1 : \text{枝 } e_{\lambda} \text{ が節点 } P_i \text{ に接続し, } e_{\lambda} \text{ の方向が } P_i \text{ に流れ込む方向の場合} \\ 0 : \text{枝 } e_{\lambda} \text{ が節点 } P_i \text{ に接続していない場合} \end{cases}$$

今枝 e_{λ} を流れる枝電流を i_{λ} とし、節点 P_i に存在する点電流源 S_i 、又枝 e_{λ} に存在する枝電圧降下を U_{λ} 、節点 P_j に存在する点電位を V_j と定めると、接続マトリックス D によって Kirchhoff の電流律は明かに

$$(S_i) = (d_{\lambda i}^i)(i_{\lambda})$$

と表わされる。又枝電圧降下 U_{λ} と点電位 V_j の関係は

$$(U_{\lambda}) = (d_{\lambda i}^i)'(V_j)$$

と表わされる。但し $(d_{\alpha\alpha}^i)' = \left(\frac{D'}{d_i}\right) = \{(d_{\alpha\alpha}^i) \text{ の転置行列} \}$ 節点解析に於ては枝アドミッタンス $y_{\alpha\alpha}$ が与えられて点アドミッタンス Y_{ij} を知る事が重要であり、これを節点変換という。

節点変換は接続マトリックス D によって次の如く計算される。

$$(i_{\alpha}) = (y_{\alpha\alpha}) \cdot (U_{\alpha})$$

$$(S_i) = (Y_{ij}) \cdot (V_j)$$

然るに

$$(S_i) = D \cdot (i_{\alpha}) = D \cdot (y_{\alpha\alpha}) \cdot U_{\alpha}$$

$(U_{\alpha}) = D' (V_j)$ であるから結局

$$(S_i) = D \cdot (y_{\alpha\alpha}) \cdot D' (V_i)$$

$$\text{従って} \quad (Y_{ij}) = D \cdot (y_{\alpha\alpha}) \cdot D' \quad (4.1.1)$$

となる。上式を解くため、先ず $\det(Y_{ij})$ を計算する。行列算に於ける Binet-Cauchy の定理によって次の如く表わされる。(20) (22)

$$\det(D \cdot (y_{\alpha\alpha}) \cdot D') = \sum \{ (D \cdot (y_{\alpha\alpha})) \text{ と } D' \text{ の対応する主小行列式の積} \}$$

但し \sum は全ての主小行列式についての和をとる事を意味する。 D は $m-s$ 行 n 列の行列であるからその主小行列式は $(m-s)$ 次である。

→簡単のため $s=1$ (即ち連結なグラフ) と考え且つ相互誘導はないものとしよう。この時行列 $(y_{\alpha\alpha})$ は対角行列であって式(4.1.1)は

$$\det(D (y_{\alpha\alpha}) D') = \sum (y_{i1} y_{i2} \cdots y_{im-1}) (D \text{ の主小行列式})^2$$

と表わされる。但し $(y_{i1} y_{i2} \cdots y_{im-1})$ は対応する D の主小行列式の各列に相当する枝の枝アドミッタンスを意味している。従って点アドミッタンスを求めるのには零でない D の主小行列式を見出すことが必要となったが、接続行列の性質として次の事が知られている。

「接続行列 D の $m-1$ 次主小行列式が零でないための必要且つ充分条件はその $m-1$ 次の列に対応する $(m-1)$ 個の枝が全ての節点に接続し且つ閉路を伴わない事である。その時主小行列式は ± 1 の値をとる」(19) (21)

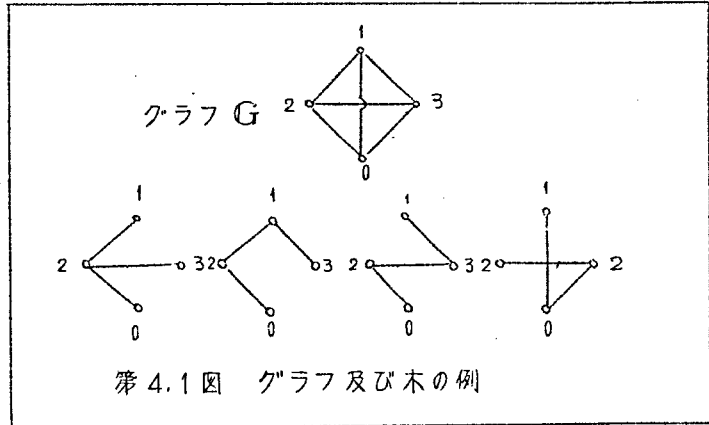
零でない主小行列式に対応して、グラフ G の部分グラフとして木 (tree) と名付けられるグラフを考える。

(定 義)

m 個の節点と n 個の枝からなる連結なグラフにおいて全ての節点を通り決して閉路を形成しない部分グラフを木と言う。(23)

木の 1 例を第 4.1 図に示す。 $m=4$ であり 3 個の枝からなる非閉路グラフである。

与えられた連結回路網の枝アドミッタンスのうち丁度木を形式する $m-1$ 個の枝アドミッタンスの組の積



$$(y_{i1} \cdot y_{i2} \cdot \dots \cdot y_{im-1})$$

を木アドミッタンス積 (tree product) と名付けるとき、⁽²⁰⁾ 相互誘導のない受動線形相反集中定数回路網においては点アドミッタンス行列式を $V(y_x)$ と表わせば

$$V(y_x) = \sum (\text{木を形成する } y_x \text{ の積})$$

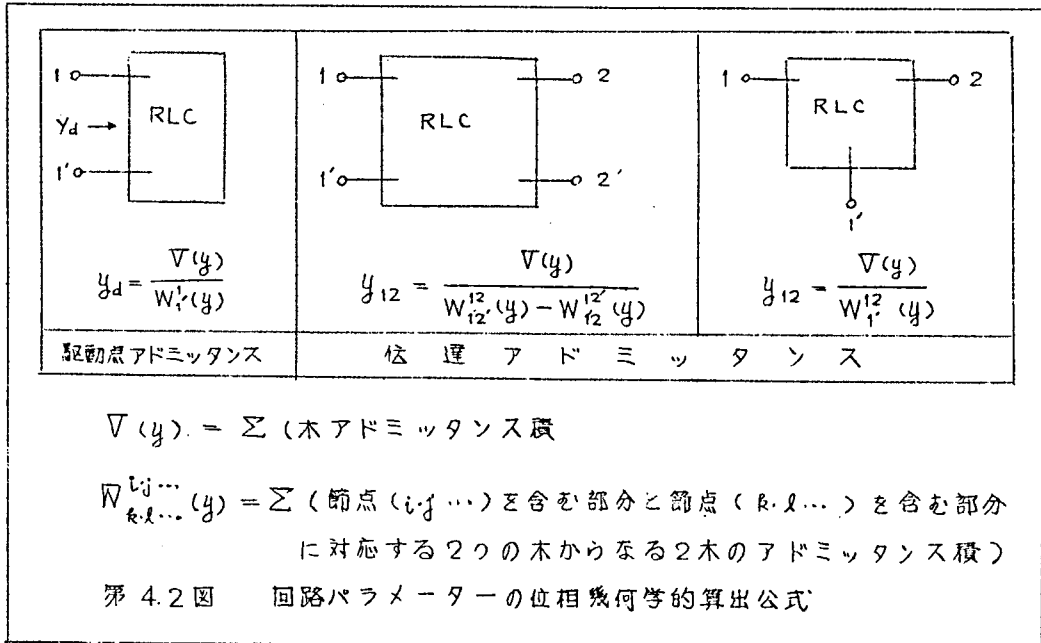
となる。但し \sum はあらゆる可能な木についての総和を意味する。

又同様な考察によって、式(4.1.1) の i 行 i 列の元素余因子を Δ_{ii} とすれば

$$\Delta_{ii} = \sum (\text{2木を構成する } y_x \text{ の積})$$

となる事が知られている。ここで 2 木というのは m 個の節点、 n 個の枝からなる接続されたグラフにおいて、もとのグラフを 2 個の接続部分に分解し一方に節点 i を、又他方に基準点を含ませたとき、それぞれの部分グラフにおける木からなる 2 つの木の組を言う。2 木は木において節点 i と基準点を結ぶ枝を取除いたものとなっている。以上述べた様に節点解析は結局与えられた回路網における全ての可

能な木及び2木を求めることに帰着し、木及び2木が求まれば、直ちに木アドミッタンス積或は2木アドミッタンス積を作って点アドミッタンス行列及びその逆行列を極めて容易に求める事が出来る。例えば相互誘導を含まないRLC回路網の駆動点アドミッタンス或は伝達アドミッタンスはW. Mayedaによれば第4.2図の様に表示される。(20)

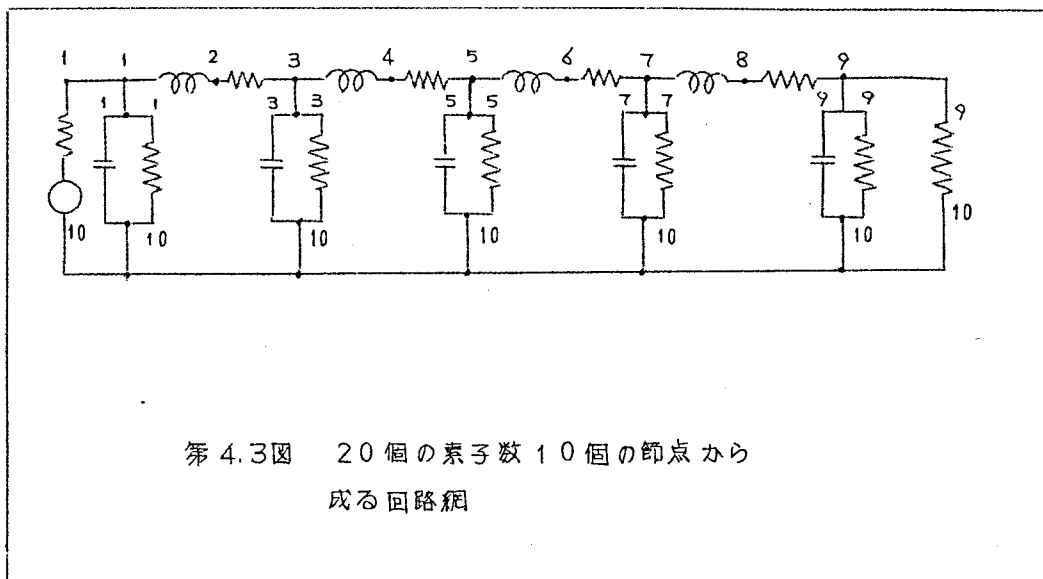


以上述べたのは現在行われている回路網トポロジーによる節点解析の要旨である。問題は(4.1.1)の逆行列を如何にうまく解くかという数値計算問題に帰着している。数値計算法の進歩と共に逆行列を速くうまく解く方法もいくつか提案されているが、木によって解くのもその1例と考えられる。結局この方法が有効であるか否かは、実際に計算を行ったときの計算速度、及びその際必要となる取扱う数値の量(電子計算機に必要な記憶容量)によって判別されねばならない。

節点、枝の数が大きい回路網においては逆マトリックスを求めるのは至難であり、木解析が有力になって来ると思われるが、有利になるためには可能な全ての木を如何にして速く容易に求める事が出来るかにかかっている。木の総数は

$$N = \det(D \cdot D')$$

によって与えられ、節点10個、枝20個を有する第4.3図においては $N = 4756$ である。J. MacWilliams⁽³¹⁾及びE. W. Hobbs⁽³²⁾が指摘した様にこのグラフから木を求めるために9個の枝からなる全ての部分グラフの内閉路をなすもの



を除く事によって，木を得るものとすれば

$${}_{20}C_9 = 167960$$

だけの部分グラフのうちから 4756 個の木を探し出さねばならない。若し木が否かを調べる動作に 計算機によって 1 秒かかるものとすれば，木を求めするのに 167,960 秒即ち 46.5 時間かかる。これではこの方法の便利さが失われる。

Frank Harary (37) が回路網トポロジーの今後の最も重要な問題として 特に「Find conveniently all the trees of a graph」をあげている。この問題が解決されねば 如何に計算機が発展しても 回路網解析は進歩しない。本節ではこの問題に対する著者の研究を述べる。著者の研究による木を算出する方法は木から木を求めて行く方法で 計算の途中で一度求めた木を二度求める事が殆んどない非常に有効な方法なのである。

4.1.2 線形グラフの論理演算法則

既に第 3.1 節に於て述べた様に n 個の受動線形回路素子からなる電気回路を線形グラフに対応付ける事が出来る。今 m 個の節点 P_i ($i = 0, 1, 2, \dots, m-1$) とそれらを結び節点に於てのみ交わる n 個の枝 C_{μ} ($\mu = 1, 2, \dots, n$) からなる線形

グラフを G と表わし 第3.1節の(定義1)に於て定義した様にグラフ G の全ての部分グラフを n 次元ベクトル $G_\alpha = [g_{jk}^\alpha]$ で表わす事にする。第3章に於てはベクトル表示されたグラフの演算則として2進法とする加算則を導入し、一次独立一次従属並びにアベル群等の概念を適用したが、グラフ理論を実際に応用し、計算機を駆使して有効な結果を導くには必ずしも充分ではない。本節に於てはこの様な位相幾何学的考察を、自動計算機の立場から遂行出来るための準備として新しい演算法則を導入する。

さて今考察の対称とするグラフは n 個の枝を有し m 個の節点を有するグラフ G 及びその部分グラフとし全て第3章(定義1)に基づいて式(3.1.1)の如く

$$G_\alpha = [g_{jk}^\alpha] \quad g_{jk}^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{---} e_{jk} \notin G_\alpha \\ 1 & \text{---} e_{jk} \in G_\alpha \end{cases}$$

と表わしてある事とする。これからグラフを取扱う事は0と1からなる n 桁2進数を取扱うことに帰着し、電子計算機の使用に適している。即ちあらゆる位相幾何学的諸量を n 桁2進数としこれを1語として記憶し、語と語の相互の適当な演算を施すことによって、電子計算機を用いて組織的にグラフの構造を解析し、回路網解析及び構成を行うことが出来るのである。そのために次の演算法則を新たに定義する。

[定義 1]

部分グラフ $A = [\alpha_{jk}]$ $B = [\beta_{jk}]$ $C = [\gamma_{jk}]$ に対して次の演算法則を定義する。

$$(i) \quad A \cdot B = C \quad (4.1.2)$$

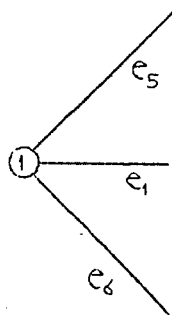
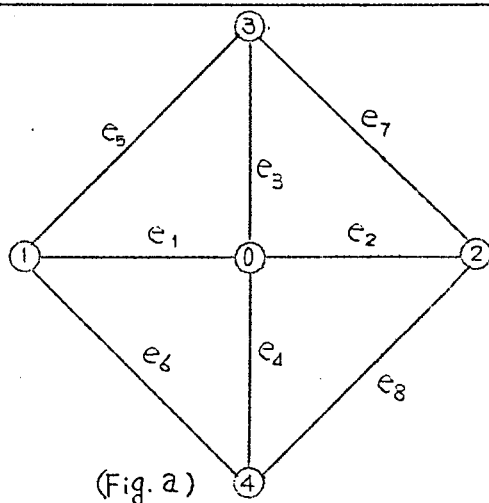
但し $\gamma_{jk} = \alpha_{jk} \cap \beta_{jk}$: α_{jk} と β_{jk} の論理積

$$(ii) \quad A + B = C \quad (4.1.3)$$

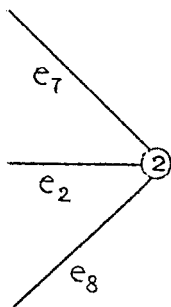
但し $\gamma_{jk} = \alpha_{jk} \cup \beta_{jk}$: α_{jk} と β_{jk} の論理和

$$(iii) \quad \hat{A} = C \quad (4.1.4)$$

但し $\gamma_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{---} \alpha_{jk} = 1 \text{ のとき} \\ 1 & \text{---} \alpha_{jk} = 0 \text{ のとき} \end{cases}$

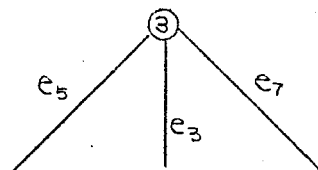


$$P_1 = (10001100)$$

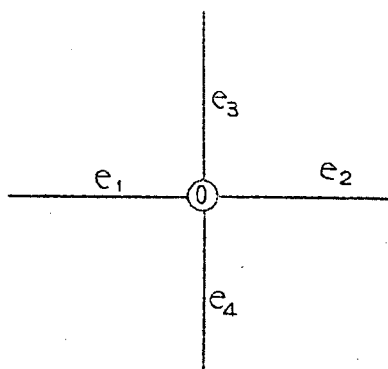


$$P_2 = (01000011)$$

(節点)



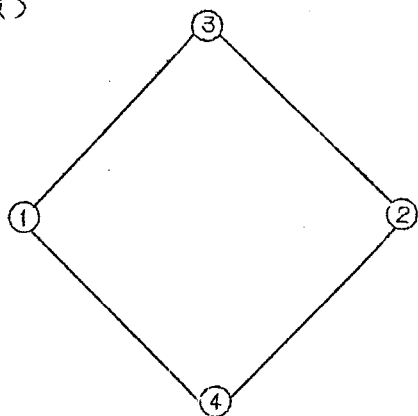
$$P_3 = (00101010)$$



$$T = (11110000)$$

(木)

(Fig. b)



$$C = (00001111)$$

(閉路)

第4.4図 グラフとその部分グラフの例

(iv) 部分グラフ A と B との距離 $D(A, B)$ を次の様に定義する。

$$D(A, B) = \sum (\alpha_{jk} - \beta_{jk})^2 \quad (4.1.5)$$

特に $B = 0$ の場合 A のノルムが定義される。

$$(A \text{ のノルム }) = |A| = D(A, 0) = \sum (\alpha_{jk})^2 \quad (4.1.5)'$$

以上の定義に於て (i) 乃至 (iii) は通常の論理演算法則であり，ビット毎の論理演算命令を備えている。自動計算機に於ては簡単に遂行し得るものである。

又定義 (iv) に於て $D(A, B)$ は部分グラフ A と部分グラフ B の間の相異なる枝の総数であり $\text{Norm } A = |A|$ は A に属する枝の総数を表わしているのである。第 4.4 図は簡単なグラフとその部分グラフを示したものである。

さて定義 1 から，容易に次の演算規則が導かれる。

(i) 交換律

$$\left. \begin{aligned} A \cdot B &= B \cdot A \\ A + B &= B + A \end{aligned} \right\} \quad (4.1.6)$$

(ii) 結合律

$$\left. \begin{aligned} A \cdot (B \cdot C) &= (A \cdot B) \cdot C \\ A + (B + C) &= (A + B) + C \end{aligned} \right\} \quad (4.1.7)$$

(iii) 分配律

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (4.1.8)$$

さて以上述べた様に 全ての部分グラフは n 次元空間の単位立方体の頂点に写像されその相互の演算法則によって取扱われる。回路網トポロジィーの種々の理論及び法則，定理等はそのままこの様なベクトル空間表示で定義 1 の演算法則によつて記述する事が出来る。それをここで述べる事はしないが，後節に於て必要に応じて従来の理論を本節の記述法で導入する事がある。

4.1.3 非分離グラフと電気回路網

後述の理論に必要であるため本節に於ては簡単に非分離グラフについて述べる。非分離グラフ (non-separable graph) とは Hassler Whitney⁽³⁶⁾ によって 1932 年提唱された概念であつて本章の理論に於ては重要なものである。それは次の様に定義される。

(定義 2)

連結グラフ (Connected graph) が、只 1 個の節点 P_c に於てのみ接続された 2 つの部分グラフ H_1 及び H_2 によって表わされ得ない時この連結グラフは非分離 (non-separable) グラフと言う。⁽³⁶⁾ 但し H_1 及び H_2 は少なくとも 1 個の枝を有するものとする。

非分離グラフでないものを分離グラフと言う。連結していないグラフは勿論分離グラフであり、又 1 箇の節点 P_c に於て接続した 2 つの連結グラフ H_1, H_2 からなる連結グラフも勿論分離グラフである。このとき節点 P_c をカット節点 (Cut-vertex) と言う。明かに或る連結グラフが非分離グラフであるための必要且充分条件はその連結グラフがカット節点 (cut-vertex) を有しない事である。

非分離グラフの基本的性質を列举すれば次の通りである。⁽³⁶⁾

a) 非分離グラフならば、任意の 2 個の節点を通る 1 個の閉路が存在し、逆も成立する。

b) 非分離グラフに於ては全ての節点には少なくとも 2 個の枝が接続する。

c) 非分離グラフに於て $n-m-s=1$ なるものは 1 個の閉路である。

但し n は枝の総数 m は節点の総数 s は独立接続部分の数であり $n-m+s$ は独立閉路の数 (或は第 1 Betti 数) である。即ち最も簡単な非分離グラフは 1 個の閉路である。

さて電気回路網の解析構成に於ては点電流源或は点電圧源を考える事があるが、実際にはあらゆる電流源は必ず帰路を必要とする。(電池、発電機等) 又実際の電圧源は必ず基準の電位 (接地点) との差で与えられている。この事は電源を

合めた等価回路を考察する時、点電流源、点電圧源はその等価回路の適当な閉路の上にある節点にのみ存在していると考えてよい事を示している。従って特殊な目的の場合を除き電気回路の解析及び構成等に出現する等価回路は自由枝を有しない。従ってその等価回路網に対応するグラフは非分離グラフとして一般性は少しも失われないのである。

以下の議論に於てはグラフは非分離グラフであるものとする。

4.1.4 木の算出法

既に述べた様に回路解析を遂行するため最も重要な事は与えられたグラフ（線形非分離） G から可能な全ての木を求める事である。可能な全ての木の集合を求めるには多くの研究が発表されているが何れも莫大な計算量を必要とし電子計算機を用いてさえも計算が困難となる場合が多く、有効な計算法の出現が要望されていた。ここで述べる方法は後述の如く現在知られているあらゆる方法のうち画期的に能率が高いものであつて木及び補木の算出の問題に一つの解答を与えたものである。

先ず次の定義から始める。

[定義 3]

連結グラフ G の 1 つの木 T に対して 節点 P_i が

$$|T \cdot P_i| = 1 \quad (4.1.9)$$

を充すとき、 P_i は 木 T の端点であると言う。

[定理 1]

非分離グラフ G に於て 任意の節点を端点とする木は少なくとも 2 個存在する。

[証明]

G から 任意の節点 P_i を取除いた部分グラフ G_i を考えよう。

$$G_i = G \cdot \widetilde{P_i} \quad (4.1.10)$$

G は非分離グラフであり P_i はカット節点ではないから G_i は連結グラフである。従って G_i は少なくとも1個の木 T_i を有する。

$|P_j \cdot P_i| = 1$ なる他の節点 P_j に対して

$$T = T_i + (P_j \cdot P_i) \quad (4.1.11)$$

をとれば、 T は P_i を端点とする木である。非分離グラフに於ては如何なる節点も少なくとも2個の枝を有している事から P_i に対して (4.1.11) で表わされる木が少なくとも2個求め得る。(証明終り)

さて電子計算機を用いて木の集合を求めるための有効な方法として筆者は新しい計算法「スフレッド変形」を提案する。それは次の定義で示される。

[定義 4]

木の集合 $\{T_h\}$ の節点 P_i に関するスフレッド変形とは $\{T_h\}$ から次の操作によって新しい木の集合 $\{T_l\}$ を求める事を言う。

$$(\text{操作 1}) \quad |T_h \cdot P_i| > 1 \quad (4.1.12)$$

を満たす木 T_h はそのまま新しい木の集合 $\{T_l\}$ の要素とする。

$$(\text{操作 2}) \quad |T_h \cdot P_i| = 1 \quad (4.1.13)$$

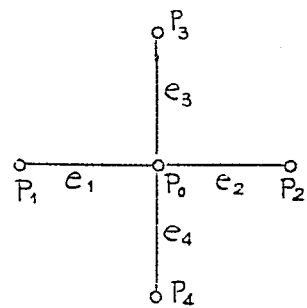
を満たす木 T_h に対し次式で新しい木 T_l を求める。

$$T_l = [T_h \cdot \hat{P}_i] + p_{jk}^i E_{jk} \quad (p_{jk}^i \neq 0 \text{ なる全ての } p_{jk}^i \text{ に対して}) \quad (4.1.14)$$

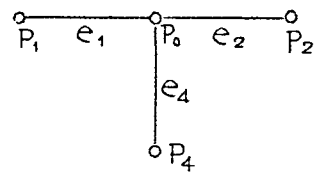
但し p_{jk}^i は P_i の j 番目の成分 (0か1) である。

(4.1.14) で求まった T_l を新しい木の集合 $\{T_l\}$ の要素とする。

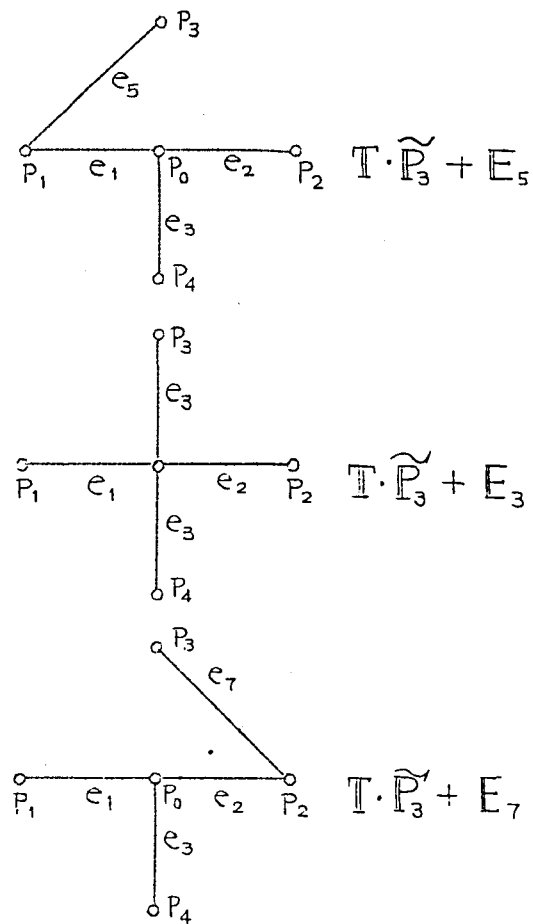
さて定義4では木の集合 $\{T_h\}$ と木の集合 $\{T_l\}$ との間にスフレッド変形が定義されたが1個の木 T_h から新しい木の集合 $\{T_l\}$ を求めたとき T_h と $\{T_l\}$ のうちの任意の1個の木との間の変形関係も(狭義での)スフレッド変形と言う事にする。



T



$T \cdot \widetilde{P}_3$



第 4.5 図 木のスフ・レッド変形の例

(定理 2)

木 T の 1 つの端点 P_i において

$$|P_i| = \mu_i$$

ならば T の P_i に関するスフレッド変形によって μ_i 個の相異なる木が得られる。

(証明)

零でない P_i の成分が μ_i 個存在するから (4.1.14) より μ_i 個の木が得られる。
(証明終り)

スフレッド変形の簡単な例を第 4.5 図に示す。図に於て $T \cdot \widetilde{P}_3$ は端点分離部分木であって、これに枝 E_3, E_5, E_7 を加えることによって、新しい木の集合を得ることが出来る。即ちスフレッド変形によって、1 個の木が 3 個の相異なる木の集合にスフレッドされたと言えることが出来るのである。

(定義 5)

非分離グラフ G の 1 つの木 T において、節点 P_μ と T の端点との間の道 (Path) のノルムの最小値を μ とするとき、節点 P_μ は木 T に関する μ 位の節点と名付ける。

(補助定理)

スフレッド変形を有限回適用することにより、非分離グラフ G の 1 つの木から任意の節点 P_μ を端点とする木に変形することが出来る。

(証明)

木は分離グラフ (separable graph) であり、節点 P_{μ_0} によって 2 個の部分木 T_{S_1} と T_{S_2} に分けられる。今 S_1 及び S_2 を夫々 T_{S_1} 及び T_{S_2} に含まれる節点の組とする。但し P_{μ_0} は S_1 にも S_2 にも属さないものとする。

さて G は非分離グラフであるから、 S_1 に属する節点のうち少なくとも 1 個は S_2 に属する節点と接続している。先ず P_{μ_0} は木 T に於て 1 位の節点で

あるものとしよう。このとき S_1 は木 T の端点の集合である。従って今 S_1 に属する 1つの節点に関して、スフレッド変形を施して S_1 に属する節点を 1個減少させ、 S_2 に属する節点を 1個増加させることが出来る。かくして S_1 に属している節点についてスフレッド変形を適当な順序で逐次施して行けば、遂に S_1 を零集合とすることが出来る。このとき P_{μ_0} は端点となっている。次に P_{μ_0} が木 T に関して 2位の節点であるものとする。このとき S_1 は 0位(端点)及び 1位の節点の集合である。従って S_1 に属する任意の節点は上述の様に有限回のスフレッド変形によって S_1 に属する節点の数を増加させる事なく端点となる事が出来る。 S_1 が 0位(端点)の節点のみの集合となれば上述の様に P_{μ_0} を端点とする様にスフレッド変形を遂行する事が出来る。 P_{μ_0} が T において μ 位の節点ならば S_1 は 0位, 1位, 2位, ..., $\mu-1$ 位の節点の集合である。0位, 1位, ..., $\mu-1$ 位の節点がある有限回のスフレッド変形によって端点(0位)とする事が出来れば μ 位の節点 P_{μ_0} も有限回のスフレッド変形で端点となる事が出来る。即ち定理は数学的帰納法で証明された。

(証明終り)

〔定理 3〕

非分離グラフ G の任意の木はスフレッド変形を有限回繰返す事により他の任意の木に変形する事が出来る。

〔証明〕

今 G が只 2個及び 3個の節点のみから成る場合は定理は明白である。さて G が μ 個の節点を有する非分離グラフであるとき定理が正しいものとして $(\mu+1)$ 個の節点を有する非分離グラフについて考察しよう。定理 2 及び補助定理により、この様なグラフの任意の 2つの木は有限回のスフレッド変形により同一の節点 P_{μ_0} を端点とする木 T_1 及び T_2 に変形され、且関係式

$$T_1 \cdot P_{\mu_0} = T_2 \cdot P_{\mu_0} = P_{\mu_1} \cdot P_{\mu_2}$$

を満足させる事が出来る。

$(T_1 \cdot \tilde{P}_{\mu_0})$ 及び $(T_2 \cdot \tilde{P}_{\mu_0})$ は共に G から P_{μ_0} を除いた μ 個の節点を有するグラフの木であり、 $(T_1 \cdot \tilde{P}_{\mu_0})$ は有限回のスフレッド変形によって $(T_2 \cdot \tilde{P}_{\mu_0})$ に変形することが出来る。この様なスフレッド変形は節点の順序 $P_{\mu_1}, P_{\mu_2}, \dots, P_{\mu_\mu}$ に従って逐次遂行されたものとする。節点の順序 $(P_{\mu_1}, P_{\mu_2}, \dots, P_{\mu_\mu})$ のうち P_{μ_i} が現れないならば、 T_1 に同じ順序に従って

スフレッド変形を行えば T_2 が得られる。節点の順序 $(P_{k_1}, P_{k_2}, \dots, P_{k_i}, \dots, P_{k_\mu})$ が P_{k_i} を含んでいるならば、 T_1 に対して節点の順序 $(P_{k_1}, P_{k_2}, \dots, P_{k_i}, P_{k_i}, P_{k_i}, \dots, P_{k_\mu})$ (もとの順序に於て P_{k_i} の代りに $P_{k_i}, P_{k_i}, P_{k_i}$ を置換えて得られた新しいスフレッド変形の順序) に従ってスフレッド変形を次々と施せば T_2 が得られることがわかる。従って何れの場合にも定理が成立する。

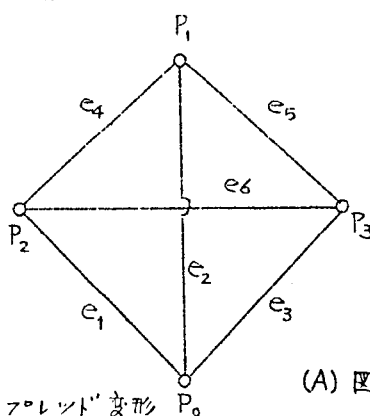
(証明終り)

さて次に n 次元ベクトル空間において、 G の木は $m-1$ 個の枝からなっているから、 $(m-1)$ 個の半径の m 次元空間の球面上の点に対応している。今 1 つの木 T_1 から 1 つのスフレッド変形によって他の木 T_2 が得られたとする。このときこのスフレッド変形を n 次元ベクトル空間の点 T_1 と点 T_2 を結ぶ枝として表わすことにする。この枝の長さは T_1 と T_2 の距離であって $D(T_1, T_2) = 2$ である。全ての可能な木に対応する $(m-1)$ 半径の球上の点は全て 2 個以上の枝 (スフレッド変形を表わす) で結ばれている。即ち何れの点もカット節点 (cut-vertex) ではなく半径 $(m-1)$ の n 次元球上の木に対応する点とその点を結ぶスフレッド変形に対応する枝からなるグラフは非分離グラフである。その 1 例を第 4.6 図に示す。

さて今日の回路網トポロジーの最も大きい問題の 1 つは全ての木を求めるための方法であるが、それは本節の理論では 1 つの木から出発して又から又へとスフレッド変形を繰返して行き遂に全ての可能な木の集合を重複する事なく、又もれる事なく算出する事である。

換言すれば、半径 $(m-1)$ の球面の M 個の点 (即ち G の木のベクトル表示に対応する点であって、 M は可能な木の総数) とスフレッド変形を表わすそれらの点を結ぶ枝からなる非分離グラフの 1 つの木を求める事が問題である。このような木を求めるには、通常考えられる事は 1 つの木からスフレッド変形を繰返して多くの木を求めたとき、新しく求まった木が今まで求められている木と重複していないかどうかを検査し、重複していなければ新しい木として採用し、重複していれば棄て、次々ともはや新しい木が求まらなくなるまで繰返す方法である。しかし求めた木を検査することは大きい系の問題に於ては木の総数が莫大な数になり電子計算機によっても未だ大変な時間と手数を必要とする。

本節で述べたスフレッド変形の重要な性質から、新しく求まった木が前に求めた木と重複するか否かを検査する手続きを殆んど不必要とすることが出来るので



節点のベクトル表示

$$P_1 = (010110)$$

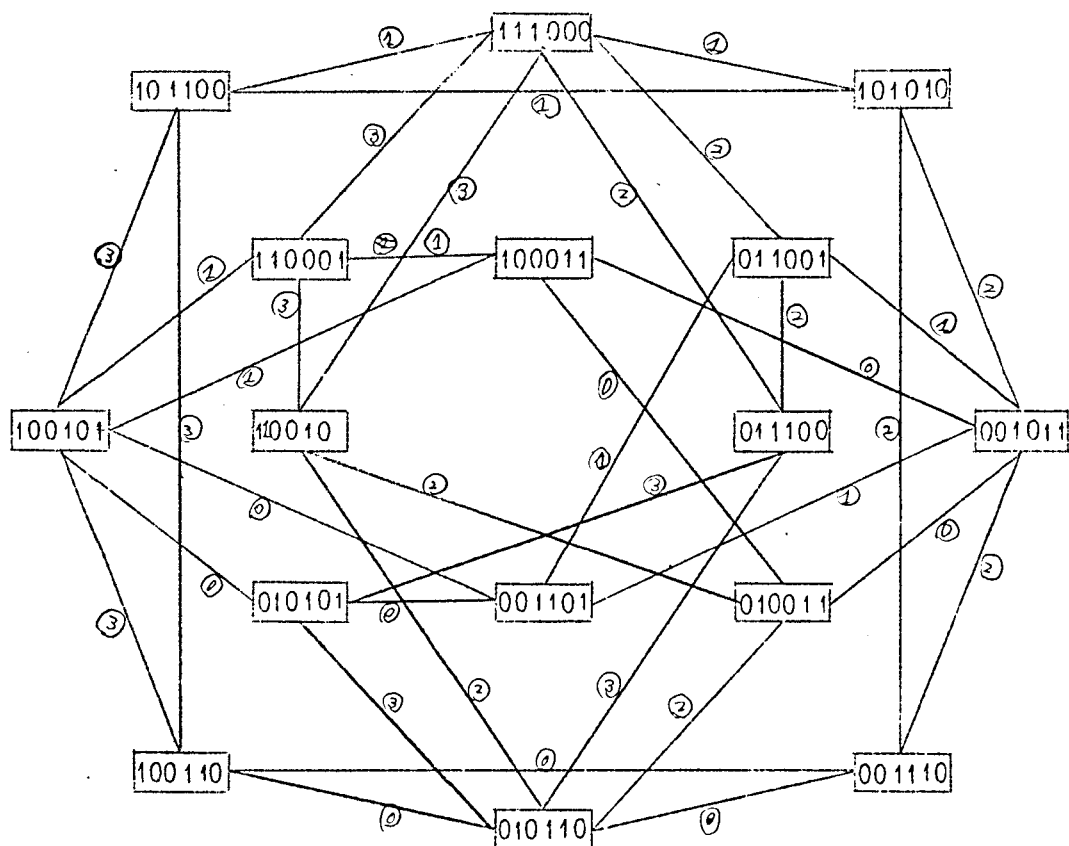
$$P_2 = (100101)$$

$$P_3 = (001011)$$

例

① ; P_1 に関するスプレッド変形
 $\{111000\}$; e_1, e_2, e_3 からなる木

(A) 図 (枝6個からなるグラフ)



(B) 図 [クラフの可能な全ての木のベクトル表示。
 (スプレッド変形で移り得る木は線で結んである)]

第4.6図 グラフとその可能な全ての木のベクトル表示

ある。それを次の定理で示す。

〔定理 4〕

1つの木から出発して、 ν 個の相異なる節点に関して ν 回逐次スフレッド変形を行った時得られる木の集合は

$$\nu \leq m-1$$

ならば全て相異なる木のみからなっている。(木の重複は存在しない。)

〔証明〕

今 $\nu = m-1$ の場合を考えよう。1つの木から出発して P_0 を除く $m-1$ 個の節点について逐次スフレッド変形を行って行き木の集合 $\{T_h\}$ を得たものとする。 $\{T_h\}$ の内の二つの木 T_α, T_β が全く同一のものとしよう。 T_α, T_β の P_0 に接続する枝 E_{μ_1} の端点を P_{μ_1} (キ P_0) とする。 T_α, T_β は P_{μ_1} に関するスフレッド変形によって同一の木から変形されたものではない。次に T_α, T_β の P_{μ_1} に接続している枝を E_{μ_2} とし E_{μ_2} の端点を P_{μ_2} とすれば P_{μ_2} についてもスフレッド変形を行った筈であるが、或る木から節点 P_{μ_2} についてのスフレッド変形によって T_α, T_β が得られたのではない。何故なら T_α, T_β 共に枝 E_{μ_2} を共通に有しているからである。全く同様に残りの全ての節点について同様な事が成立し、 T_α, T_β は P_0 以外の如何なる節点に関するスフレッド変形によっても分離されたものでない。即ち T_α, T_β は $\{T_h\}$ の相異なる要素の木ではあり得ない。 $\nu < (m-1)$ の場合についても同様に証明出来る。(証明終り)

定理 4 によれば、1つの木 T から出発して P_1, P_2, \dots, P_{m-1} の相異なる $m-1$ 個の節点に関して、次々とスフレッド変形を施して最後に得られた木の組を $\{T_h\}$ とするとき、 $\{T_h\}$ とそのスフレッド変形とからなる n 次元ベクトル空間におけるグラフは部分木を形成しているのである。

さて、この部分木から完全木を見出せば G の木が全て見出せるのである。それには先ず上述の定理 4 から導びかれた $\{T_h\}$ を頂点とし、スフレッド変形を枝とする n 次元ベクトル空間における部分木を P_0 に関するスフレッド変形を行い、得られた新しい木について、今まで得られた木と重複していないかどうか調べ、重複していないもの

のみを残す。次に今残された新しい木について再び P_1, P_2, \dots の節点についてスフレッド変形を施し、その都度前回までに得られた木と重複していないかどうかを調べ、重複していないものだけを残して行く。かくして遂に全ての新しく求まった木が重複していれば逐次スフレッド変形は終了である。このとき求まった木が可能な全ての木の集合である。何故ならこの木の集合に如何なるスフレッド変形を施しても、もはや新しい木が得られない。即ち次元ベクトル空間の \mathbb{G} の木に相当する点とスフレッド変形に相当するグラフの完全木が得られていることを意味する。この方法によれば重複度を調べるべき木の数は極めて小数であり計算速度が著しく速くなる。

4.1.5 第 4.1 節の結論

本節に於ては回路網位相幾何学的手法に於て最も重要なものが木を求める事である事を明かにし、次に電子計算機を使用して可能な全ての木を求めるための有効な方法を導いた。即ちグラフを計算機で取扱いやすくするため、全てベクトルで表現し、相互のグラフに論理演算を定義した。これによって1つの木から重複する事なく相異なるいくつかの木を求め次々と相異なる木を求める事が出来た。最後に求まる木の組は重複か否か調べる必要があるが、その数は木全体に比して極めてわずかで済む事が大きい利益である。

本節の研究によって回路網位相幾何学による解析は一歩前進したと言えるであろう。

第42節 木及び多木小行列式の 相対符号の決定

4.2.1 方向付けられたグラフのベクトル表示

前節に於て述べた理論はグラフそのものの幾何学的性質を調べるものであり、枝に対応する基底ベクトル E_k によって張られるベクトル空間における演算によって理論が立てられた。相互誘導を含まない受動集中線形素子だけからなる電気回路網の解析においては前章の方法で木を求めると木アドミッタンス積 (tree admittance product) を求め回路網の諸パラメーターを求めることが出来る。

W. S. Percival⁽²³⁾ W. Mayeda⁽²¹⁾ は相互誘導のない LCR 回路網において成立した理論を相互誘導を有する、又能動素子、非相反素子を有する回路の解析にまで発展せしめた。それによると木を求めるだけでなく木小行列式の符号が必要となって来る。そのためには方向付けられた素子によって形成される方向付けられたグラフを考察しなければならない。

〔定義 6〕

n 個の方向付けられた素子からなる方向付けられたグラフ G の全ての部分グラフ G_α を n 次元ベクトル \dot{G}_α によって表現する。

$$\dot{G}_\alpha = [\dot{g}_k^\alpha] \quad (4.2.1)$$

但し

$$\dot{g}_k^\alpha = \begin{cases} +1 & \text{----- 枝 } e_k \text{ が } G_\alpha \text{ に属しその方向が一致する場合} \\ -1 & \text{----- 枝 } e_k \text{ が } G_\alpha \text{ に属しその方向が反対の場合} \\ 0 & \text{----- 枝 } e_k \text{ が } G_\alpha \text{ に属しない場合} \end{cases}$$

尚部分グラフ G_α の方向とは G_α が非閉路ならば、基準点から遠ざかる方向を正とし、 G_α が閉路ならば、閉路に沿った節点に適当に順序をつけその順序を正の方向とする。方向のないグラフのベクトル表示におけると同様に、節点ベクトル、木ベクトル、閉路ベクトルを次の様に表わす。

(a) 節点ベクトル $\dot{P}_i = [\dot{p}_\mu^i]$ (4.2.2)

$$\dot{p}_\mu^i \begin{cases} +1 & \dots\dots e_\mu \text{ が節点 } P_i \text{ に接続し } P_i \text{ から出る向きとなっている場合} \\ -1 & \dots\dots e_\mu \text{ が節点 } P_i \text{ に接続し } P_i \text{ に向う方向となっている場合} \\ 0 & \dots\dots e_\mu \text{ が節点 } P_i \text{ に接続しない時} \end{cases}$$

(b) 木ベクトル $\dot{T}_h = [\dot{t}_\mu^h]$ (4.2.3)

$$\dot{t}_\mu^h \begin{cases} +1 & \dots\dots e_\mu \text{ が木 } T_h \text{ に属し基準節点より出る方向に接続されている場合} \\ -1 & \dots\dots e_\mu \text{ が木 } T_h \text{ に属し基準節点に近づく方向に接続されている場合} \\ 0 & \dots\dots e_\mu \text{ が木 } T_h \text{ に属しない場合} \end{cases}$$

(c) 閉路ベクトル $\dot{C}_\lambda = [\dot{c}_\mu^\lambda]$ (4.2.4)

$$\dot{c}_\mu^\lambda \begin{cases} +1 & \dots\dots e_\mu \text{ が閉路 } C_\lambda \text{ に属しその方向が一致する場合} \\ -1 & \dots\dots e_\mu \text{ が閉路 } C_\lambda \text{ に属しその方向が逆の場合} \\ 0 & \dots\dots e_\mu \text{ が閉路 } C_\lambda \text{ に属しない場合} \end{cases}$$

4.2.2 木小行列式の相対符号

さて \dot{T}_h \dot{P}_i が与えられたとき 木の木小行列式の相対符号を求める事を考えよう。前章に於て P_i が与えられているとき全ての可能な木ベクトル T_h を求める方法としてスフレッド変形を説明したが、次の定理によれば同時に木小行列式の相対符号を次々と求める事が可能なのである。

[定理 5]

今木 T_μ から端点 P_i に関するスフレッド変形によって λ_i 個の相異なる木の組 $\{T\}$ を得たものとする。夫々 T_ν の木小行列式 $\det(T_\nu)$ の $\det(T_\mu)$ に対する相対符号を $S_{\mu\nu}$ とすれば、 $S_{\mu\nu}$ は次式で求められる。

$$S_{\mu\nu} = (-1)^{\varepsilon_{\mu\nu}} \cdot \dot{p}_{\mu}^i \cdot \dot{p}_{\nu}^i \quad (4.2.5)$$

但し \dot{p}_{μ}^i ; $(T_{\mu} \cdot P_i)$ の零でない方向付けられた成分 即ち

$$T_{\mu} \cdot P_i = (0 \cdots 0 \dot{p}_{\mu}^i 0 \cdots 0)$$

\dot{p}_{ν}^i ; $(T_{\nu} \cdot P_i)$ の零でない方向付けられた成分 即ち

$$T_{\nu} \cdot P_i = (0 \cdots 0 \dot{p}_{\nu}^i 0 \cdots 0)$$

$\varepsilon_{\mu\nu}$; $|T_{\mu} \cdot E_{\kappa}| \neq 0$ を充す E_{κ} のうち番号 κ が μ と ν の間のもの
である様な枝 E_{κ} の総数.

[証 明]

木 T_{μ} が $m-1$ 個の枝 $E_{\kappa_1} E_{\kappa_2} \cdots E_{\kappa_{m-1}}$ ($\kappa_1 < \kappa_2 < \cdots < \kappa_{m-1}$)
から成っているものとするば 木小行列 $\det(T_{\mu})$ はその定義から次の様に表
わされる.

$$\det(T_{\mu}) = \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_{m-1} \end{array} \begin{array}{c|cccc} e_{\kappa_1} & e_{\kappa_2} & \cdots & e_{\mu} & \cdots & e_{\kappa_{m-1}} \\ \hline \dot{p}_{\kappa_1}^1 & \dot{p}_{\kappa_2}^1 & \cdots & 0 & \cdots & \dot{p}_{\kappa_{m-1}}^1 \\ & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 & & \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & \dot{p}_{\mu}^i & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ \hline \dot{p}_{\kappa_1}^{m-1} & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \dot{p}_{\kappa_{m-1}}^{m-1} \end{array} \quad (4.2.6)$$

即ち $\det(T_{\mu})$ は $(m-1)$ 個の節点ベクトル \dot{P}_i の各成分を行とする節点
ベクトルマトリックス(即ち接続マトリックス)から木 T_{μ} を形成する枝 E_{κ_1}
 $\cdots E_{\kappa_{m-1}}$ に相当する列を取出して得られた正方行列の行列式であり, 回路
網トポロジーの基本的理論からその行列式の値は $+1$ 或は -1 である事がわか
っている. 式(4.2.6)と同じく $\det(T_{\nu})$ は次の様に表わされる.

$$\det(\mathbb{T}_\nu) = \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_{m-1} \end{array} \begin{array}{c|ccc|ccc} e_{\mu_1} & e_{\mu_2} & \cdots & e_\nu & \cdots & e_{\mu_{m-1}} \\ \hline \dot{p}_{\mu_1}^1 & \dot{p}_{\mu_2}^1 & & 0 & & \dot{p}_{\mu_{m-1}}^1 \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \dot{p}_\nu^i & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ \hline \dot{p}_{\mu_1}^{m-1} & \dot{p}_{\mu_2}^{m-1} & \cdots & 0 & \cdots & \dot{p}_{\mu_{m-1}}^{m-1} \end{array} \quad (4.2.7)$$

さてスプレッド変形の性質から E_μ 及び E_ν は木 \mathbb{T}_μ 及び \mathbb{T}_ν の共通の端点に接続する夫々の木の成分である。そこで式 (4.2.6) に於て枝 E_μ に相当する列をそのまま枝 E_ν に相当する節点マトリックス (接続マトリックス) の列と置換して新しい行列式 $\Delta(\mu \rightarrow \nu)$ を作る。

$$\Delta(\mu \rightarrow \nu) = \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_{m-1} \end{array} \begin{array}{c|ccc|ccc} e_{\mu_1} & \cdots & e_\nu & \cdots & e_{\mu_{m-1}} \\ \hline & & 0 & & \\ & & 0 & & \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ \hline 0 & \cdots & \dot{p}_\nu^i & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ \hline & & 0 & & \end{array} \quad (4.2.8)$$

今 $\mu < \nu$ とし $\mu < \mu < \nu$ の範囲の番号の枝 E_μ のうち

$$|\mathbb{T}_\mu \cdot E_\mu| \neq 0$$

なるものが $g_{\mu\nu}$ 個あるものとすれば, (4.2.8) 式で表わされる行列式 $\Delta(\mu \rightarrow \nu)$ に対して $g_{\mu\nu}$ 回の列の置換を行うことによって $\det(\mathbb{T}_\nu)$ が得られる。又 $\nu < \mu$ の場合に於ても同様なことが成立する。 $g_{\mu\nu} = 0$ ならば当然 $\det[\mathbb{T}_\nu] = \Delta(\mu \rightarrow \nu)$ となる。従って次式が成立する。

$$\det [\mathbb{T}_\nu] = (-1)^{\mathcal{E}_{\mu\nu}} \cdot \Delta(\mu \rightarrow \nu) \quad (4.2.9)$$

一方

$$\det [\mathbb{T}_\mu] = \dot{p}_\mu^i \cdot A \quad (4.2.10)$$

但し $A : \dot{p}_\mu^i$ に関する $\det [\mathbb{T}_\mu]$ の余因子

$$\Delta(\mu \rightarrow \nu) = \dot{p}_\nu^i \cdot A \quad (4.2.10')$$

従って

$$\det [\mathbb{T}_\nu] = (-1)^{\mathcal{E}_{\mu\nu}} \cdot \dot{p}_\nu^i \frac{1}{\dot{p}_\mu^i} \det [\mathbb{T}_\mu] \quad (4.2.11)$$

$|\dot{p}_\mu^i|^2 = 1$ であるから結局 $\det [\mathbb{T}_\mu]$ に関する $\det [\mathbb{T}_\nu]$ の相対符号を $S_{\mu\nu}$ とすれば

$$S_{\mu\nu} = \frac{\det [\mathbb{T}_\nu]}{\det [\mathbb{T}_\mu]} = (-1)^{\mathcal{E}_{\mu\nu}} \dot{p}_\mu^i \cdot \dot{p}_\nu^i \quad (4.2.12)$$

と表わされるのである。

(証明終り)

4.2.3 グラフの微分演算

次節の応用のため、本節ではグラフの微分演算を定義する。

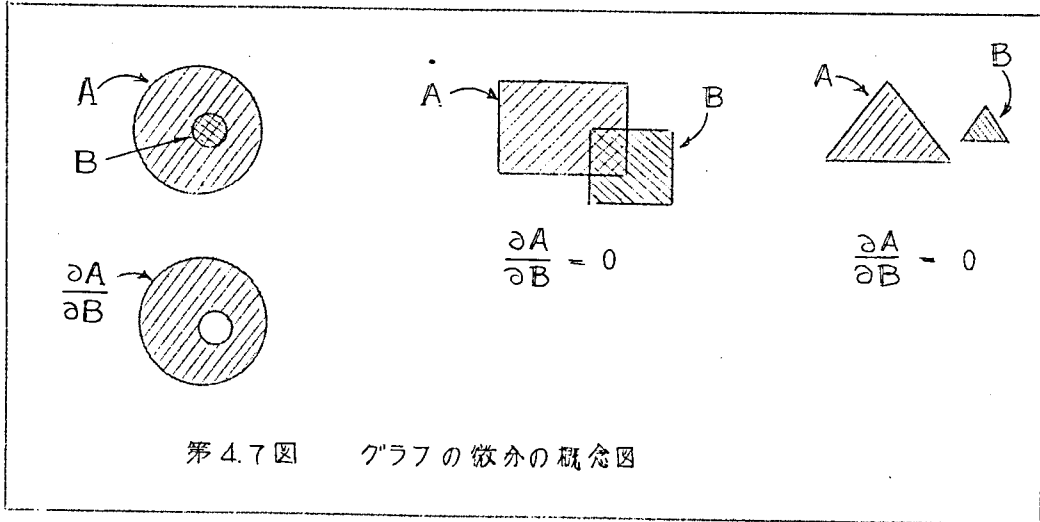
〔定義 7〕

グラフ A のグラフ B に関する微分とは、 B が A の部分グラフならば、 A から B を除いたグラフを意味し、 B が A の部分グラフでなければ零グラフとする。即ち次式で示す。

$$\frac{\partial A}{\partial B} = \begin{cases} A \cdot \tilde{B} & \text{----- } B \subset A \text{ の場合} \\ 0 & \text{----- その他の場合} \end{cases} \quad (4.2.13)$$

グラフの微分は後述する様に木アドミッタンス積 (tree product) を或る

枝アドミッタンスによって微分した時得られる壁に対応し"微分"と言う用語は本来の意味を有しているのである。グラフの微分を記号的に説明すれば第4.7図の如くなる。

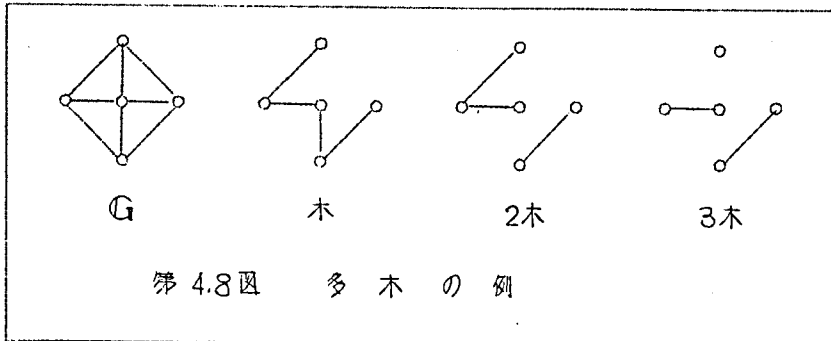


4.24 多木の算出とその相対符号

連結した接続グラフ G の部分グラフであって G の全ての節点を有し且閉路を含まないもので連結接続成分が γ 個である様なグラフを γ -木 (γ -tree) と言う。 $\gamma = 1$ ならば今まで述べた木である。

今節点 P_i を1つの独立接続成分に含み、他の節点 P_j を他の1つの独立成分に含む2個の成分からなっている2-木を T_j^i と表わせば、 T_j^i は木 T を枝 E_{ij} ($P_i \cdot P_j$ の成分) で微分する事によって

得られる事は容易に知られる。



$$T_j^i = \frac{\partial T}{\partial E_{ij}} \quad \text{但し } |E_{ij}(P_i \cdot P_j)| = 1 \quad (4.2.14)$$

次に節点 $P_{\mu_1}, P_{\mu_2}, \dots, P_{\mu_\nu}$ を1つの接続成分のうちに含み基準節点 P_i を他の接続成分に含む2-木を $T_i^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_\nu}$ と表わせば、かかる2-木の集合 $\{T_i^{\mu_1}\} \{T_i^{\mu_2}\} \dots \{T_i^{\mu_\nu}\}$ の共通集合として求められる。即ち

$$\{T_i^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_\nu}\} = \left\{ \frac{\partial T}{\partial E_{i\mu_1}} \right\} \cap \left\{ \frac{\partial T}{\partial E_{i\mu_2}} \right\} \cap \dots \cap \left\{ \frac{\partial T}{\partial E_{i\mu_\nu}} \right\} \quad (4.2.15)$$

によって求められる。

又 P_i, P_j, P_k を三個の独立成分のうちに含む3-木を T_{jk}^i と表わせば、これは T_j^i を $(P_j \cdot P_k)$ で微分して得られる。

$$T_{jk}^i = \frac{\partial T_j^i}{\partial E_{jk}} \quad (4.2.16)$$

或は

$$T_{jk}^i = \frac{\partial T_{jk}^j}{\partial (E_{ik})}, \quad T_{jk}^j = \frac{\partial T_{jk}^k}{\partial (E_{ij})} \quad (4.2.17)$$

或は記号的に二重微分として表わす。

$$T_{jk}^i = \frac{\partial}{\partial (E_{jk})} \left(\frac{\partial T}{\partial (E_{ij})} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial (E_{jk}) \partial (E_{ik})} \quad (4.2.18)$$

一般に多木は木の多重微分によって容易に求められる。この事は電子計算機によって計算を行うのに極めて適しているのである。

さて既に述べた様に回路解析のためには多木小行列式の相対符号を知る必要がある。そのためには次の定理が有効である。

(定理 6)

木 T を枝 $E_\nu (=E_{ij})$ によって微分して得られた2-木を T_j^i とするとき、 $\det(T_j^i)$ の相対符号は木 T の小行列式 $\det(T)$ の相対符号の $(-1)^{\lambda}$ 倍に等しい。但し λ は $\mu < \nu$ なる枝 E_μ のうち木 T に含まれているものの総数とする。

(証明)

木 T の小行列式 $\det(T)$ は基準節点 P_i を除いた残りの全ての節点ベク

トルを行とする行列のうち木 \mathbb{T} を構成する枝に相当する列を取り出して作られた正方行列の行列式である。

又 $\det(\mathbb{T}_j^i)$ は節点 P_i 及び P_j を除いた節点ベクトルを行とする行列のうち \mathbb{T}_j^i を構成する枝に相当する列を取り出して作られた $(m-2)$ 行, $(m-2)$ 列の正方行列から得られる行列式である。即ち $\det(\mathbb{T}_j^i)$ は $\det(\mathbb{T})$ の p_j^v の余因子に等しい。

$$\det(\mathbb{T}) = \begin{vmatrix} p_1 & E_{\kappa_1} & \cdots & E_{\nu} & \cdots & E_{\kappa_{m-1}} \\ p_2 & & & 0 & & \\ \vdots & & & \vdots & & \\ p_j & 0 & \cdots & 0 & p_j^v & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \\ p_{m-1} & & & 0 & & \end{vmatrix} \quad (4.2.19)$$

$$= (-1)^{j+\gamma} p_j^v \det(\mathbb{T}_j^i) \quad (4.2.20)$$

但し γ は ν よりなる枝のうち木 \mathbb{T} に含まれるものの数である。

(4.2.20) に於て $\{(-1)^j \cdot p_j^v\}$ は \mathbb{T}_j^i にかかわらず一定値であるから、
結局

$$(\det(\mathbb{T}_j^i) \text{ の相対符号 }) = (-1)^\gamma \times (\det(\mathbb{T}) \text{ の相対符号})$$

となる。

(証明終り)

相互誘導、非相互素子を含む回路網においては枝アドミッタンス $y_{\kappa\lambda}$ のマトリックス ($y_{\kappa\lambda}$) が対角行列ではなくなるから木行列式の符号が必要となる。
(W. S. Percival⁽²³⁾, W. Mayeda⁽²¹⁾) その様な系の解析には本節で述べた相対符号の決定法が極めて好都合である。

4.25 今後の問題の検討

回路網の設計を遂行するにあたって系が大規模になればなる程 第2章及び第3章に於て述べて来た純粹な構成理論を駆使するためには、計算の桁数を極めて大きく必要とし 例え電子計算機を用いても数値計算の困難さは増大して行く。これを救う途として本編で述べた回路網位相幾何学的手法が今後もますます発達して行くものと思われる。それには大容量の電子計算機が不可欠であって、著者はこの見通しに立って この様な電子計算機の研究を行い論理設計を遂行したのである。(52)(53)(54)

今接続されたクラフの1つの木 T から出発して全ての節点ベクトル P_i を使うだけで 可能な全ての木の集合を求める場合の電子計算機のためのプログラムの流れ図 (Flow-Chart) を第4.9図に示す。ここに仮定した計算機は通常の四則演算の外に次の演算命令を有しているものとする。

(1) 内部2進数表示であってビット毎の論理和、論理積、及び2を法とする加算が出来ること。

(2) 浮動小数点としても固定小数点としても使用出来る数値の規準化 逆規準化を行う命令を設けている事

(3) 繰返し計算のための所謂 B-box を備えている事

著者の論理設計になる計算機 SENAC-1 (或は商品名 NEAC-1102) はこの目的を考慮して作られている。第4.10図はパラメトロ式電子計算機 SENAC-1 によって簡単な木 (tree) の算出を行わせたものである。

さて以上の様にして 求められた木の集合、多木の集合を用いて回路網の解析を行う事は容易であるが、実際問題において重要な事は第2章及び第3章に於て述べた構成問題に如何にして応用するかという事である。回路網トポロジーを構成問題に適用する事は未だよく研究されておらず今後の重要な研究課題である。これに対し著者は1つの方法を提案している。その概要を述べよう。

回路網伝送特性を最適化する問題は結局 n 個のアドミッタンスの組 $\{y_k(p)\}$ を如何にして求めるかということ。即ち n 次元関数空間のベクトル $Y = \{y_k(p)\}$ の近似問題とみる事が出来る。今任意の木 T に対して求められる木アドミッタンス積を $T(y)$ と表わすことにする。簡単な例題として第4.2図に示す様に相互誘導理想変圧器を含まない共通帰線回路網の動作伝送特性の近似問題を考えよう。

その動伝伝達係数は次式で表わされる。

$$S(p) = \frac{V(y)}{2W_0^{1,2}(y)} \quad (4.2.21)$$

$$\text{但し } V(y) = \sum T(y) \quad W_0^{1,2}(y) = \sum T_0^{1,2}(y) \quad (4.2.22)$$

\sum は全ての可能な $T, T_0^{1,2}$ についての和を意味する。

さて $Y = \{y_k\}$ が $Y + \delta Y = \{y_k + \varepsilon_k \eta_k\}$ となったものとする。

但し ε_k は実数とし η_k は変分関数とする。 ε_k が微小であれば伝達量関数

$\log S(p)$ は ε_k の無限級数に展開する事が出来る。今その第1項までとれば

$$\log S(p, \varepsilon_k) = \log \frac{V(y)}{2W_0^{1,2}(y)} + \sum_k \left[\frac{W_k(y)}{V(y)} - \frac{U_k(y)}{W_0^{1,2}(y)} \right] \varepsilon_k \eta_k \quad (4.2.23)$$

但し

$$W_k(y) = \sum \frac{\partial T(y)}{\partial \varepsilon_k} \quad U_k(y) = \sum \frac{\partial T_0^{1,2}(y)}{\partial \varepsilon_k}$$

と表わされる。今 η_k が純虚数値であって $j\xi_k$ と表わされるものとするれば、且

$b_k = -j \operatorname{Im} \left(\frac{W_k}{V} - \frac{U_k}{W_0^{1,2}} \right)$ とおけば 動伝達量 $A(\omega)$ は次式で表わされる。

$$A(\omega, \varepsilon_k) = A_0(\omega) + \sum B_k(\omega) \cdot \varepsilon_k \quad (4.2.24)$$

$$\left. \begin{aligned} B_k(\omega) &= b_k \cdot \xi_k \\ A_0(\omega) &= \log \frac{|V(y)|}{2|W_0^{1,2}(y)|} \end{aligned} \right\} \quad (4.2.25)$$

第1近似 $A_0(\omega)$ に対して各枝アドミッタンスの変分により $A(\omega, \varepsilon_k)$ を与えられた特性に近似させる様にする事が出来る。例えば近似領域 (ω_1, ω_2) を n 個の区間に分割し $E(\omega) = A(\omega) - A_0(\omega)$, $B_k(\omega)$, を各区間内の平均値 E_ν , $B_{k\nu}$ をとる階段関数で置換えて、連立方程式

$$E_\nu = \sum_k B_{k\nu} \varepsilon_k \quad (4.2.26)$$

を解いてその解の組 (ε_k) を第2近似として採用し逐次近似を遂行してもよいであろう。この様な計算は電子計算機の出現によって始めて可能となるのであり今後計算機の設備が進むにつれて期待がもたれる。

4.26 第4.2節の結論

前節で定義したスプレッド変形を利用して、木を求めるとき同一操作で木小行列式の相対符号を求める方法を与えた。又木を枝で微分することによって多木を容易に求める事が出来たのである。微分操作は計算機に於ては極めて簡単な論理演算であるにすぎない。木の微分により多木が求まったと同時にその相対符号を決定する理論も述べられた。

計算機を用いて本節の研究を実際に行うための流れ図も示され、同時に計算機に課せられる条件も示された。

今後は、計算機の拡充整備と共にこの理論を実用化する事は勿論、回路網理論そのものも回路網トポロジーに影響を受けつつ変わって行かぬばならない。本研究はこの様に重要な回路網トポロジーの基礎問題を大きく前進させたものである。

本研究によつて得られた主なる成果

本研究によって得られた主なる成果

本研究は伝送回路網構成における近似問題、実現問題並びに位相幾何学的問題の研究にわたっており、これらの分野の理論的發展に大きい寄与をもたらすと共に、工業的には搬送通信を主とする通信機器の性能を高め小形且低廉ならしめる事を可能にしたものである。

先ず第2章に述べられた回路網構成における近似理論の研究によってこの分野における一般的且統一理論体系が確立され、従来知られていた理論はそのごく特別な場合として含まれる様になった。この理論によって通過域(或は)阻止域をチエビシエフ特性とする如何なる濾波器の設計にもない見通しが与えられ且、解決され得たのである。即ち本研究以前には設計不可能とされていた非対称減衰特性の帯域通過濾波器及び帯域阻止濾波器の設計が可能となったのみならず、通過域が2個或はそれ以上存在する複通過域濾波器の設計、実軸上に伝達係数の零点をおく濾波器、複素減衰極を有する濾波器等の新しい形の濾波器の設計が出来る様になったのである。又これらの理論からリアクタンス回路網のみならず、更に一般のRLC受動及び能動線形回路網構成論の基礎が得られた。

第3章において述べた帯域濾波器を主とする回路実現の理論の研究によって、先ずリアクタンス帯域濾波回路網が負素子を含まないで構成されるための充分条件が導かれ、更に帯域濾波器が最小の個数の理論^{線路}を使用して実現出来るための充分条件並びにその特別な場合として対称減衰特性帯域濾波器の最小線路数回路構成のための計算法“3次インピーダンス展開法”が確立されたのである。又線路の数と回路次数との基本的関係を考察し、一般のRLC回路網にも及ぶ基礎定理が得られた。

この構成理論と第2章に述べられた近似理論が一体となって負素子の出現と回路パラメーターの関係が明らかとなり、従来LCを用いては実現不可能と思われていた急峻な遮断特性をもつ濾波器を設計し、小形化に適し、製造並びに調整に便利な回路構成として実現する事が出来る様になったのである。更に今まで知られていなかった線路の個数を最小とする濾波器の設計法が確立され、その実用化によって伝送回路網は一層経済的に製造される様になった。

この様にこの研究は学術的には新しい理論を確立したのみならず、工業的に実用化され、この研究にもとづく製品が大量に生産されて通信工業の発展に寄与し

ている。

回路網の位相幾何学的研究が第4章に述べられ、この研究によって位相幾何学的回路網理論の分野の重要な未解決な課題である「可能な全ての木及び多木を求める問題」に対して、非常に明快な解法を提供したのである。回路網の実際の設計のためには数値計算の桁数が極めて多く必要であって、たとえ電子計算機を使用しても重大な難点となりつつある。本研究は電子計算機の使用に極めて適している理論を確立し、これによって回路網の解析と構成を関係づける諸パラメータの迅速な計算が可能となったのである。これは回路網理論の新しい方向を示すもので、この研究に基づいて設計された電子計算機によって、理論の実用化が進められているのである。

謝 辞 及 び 参 考 文 献 一 覧

謝 辞

本論文を草するにあたり著者が学窓卒業以来絶えざる御指導と御鞭撻を賜った京都大学故加藤信義先生前田恵一先生、坂井利之先生に厚く感謝をささげる次第である。

又著者は伝送回路の設計並びに研究を命ぜられ終始御懇篤な御指導と御激励をたまわった日本電気株式会社小林宏治博士，出川雄二郎博士，黒川武夫博士，近藤吉治部長代理，山本勇一課長代理並びに友成治夫課長代理に満腔の謝意をささげる次第である。

本研究の遂行にあたり有益な御検討御討論をしていただき御示唆をたまわった大阪大学尾崎弘博士，藤沢俊男博士並びに多くの回路網研究の先輩の方々に衷心より感謝の意を表わし度い。

更に日本電気株式会社伝送工業部技術部の諸氏特に回路網班の家所得壽氏，藤本和弘氏には本研究の全てにわたり御協力いただき又有益な御助言御討論をいただいた。又同じく回路網班の土屋享氏，吉田幸夫氏，斉藤博光氏，櫻井昇氏，その他多くの同僚諸氏には数値計算，実験等あらゆる面で御援助御協力いただいた。ここに記して心から御礼申上げる。

(1960. 4. 12.)

参考文献一覽

- (1) S. Darlington ; "Synthesis of reactance 4-poles which produce prescribed insertion loss characteristics including special application to filter design"
Jour. Math & Phys, Vol 18 PP 257~353 Sept. 1939
- (2) W. Cauer ; "Theorie der Linear Wechselstrom-schaltungen"
Bd 1 1940 Berlin
- (3) H. Piloty ; "kanonische Kettenschaltungen für Reactanzvierpole"
T. F. T. Vol 29 249~258, 279~290, 320~325 sept. oct, Nov 1940
- (4) S. Darlington ; "Network Synthesis Using Tchebycheff Polynomial Series"
B. S. T. J. July 1952 pp 613~665
- (5) S. Darlington ; "The Potential Analogue Method of Network Synthesis"
B. S. T. J 30 pp 315~365 Apr. 1951
- (6) E. S. Kuh ; "Potential Analogue Network Synthesis for Arbitrary Loss Function"
Jour. Applied Physics Vol 24. pp 897~902 1953
- (7) G. L. Mathasei ; "Filter Transfer Function Synthesis"
Proc of the I. R. E Vol 41 pp 377~382 March 1953
(Stanford Electronics Research Laboratory Report 39 August 31. 1951)

- (8) 高橋秀俊 ; "Tchebycheff 特性を有する梯子形濾波器について"
電気通信学会雑誌 昭 26 年 2 月 pp 65 ~ 74
- (9) 喜安善市 ; "Tchebycheff 特性濾波器の相互型特性関数に関する一考察"
電気通信学会雑誌 昭 18 年 1 月 pp 5 ~ 8
- (10) O. Brune ; "Synthesis of a Finite Two-Terminal Network whose driving-point impedance is a prescribed function of frequency."
Jour. Math. Phys. Vol 10 pp 191 ~ 236 April 1931
- (11) 藤沢俊男 ; "直列端又は並列端低域濾波梯子回路が相互誘導を用いなくで構成される為の必要条件"
電気通信学会雑誌 昭 29 年 5 月 pp 341 ~ 343
- (12) T. Fujisawa ; "Realizability Theorem for Mid-series or Mid-shunt Low-pass Ladder Without Mutual Induction"
I. R. E. Transactions Circuit Theory Dec. 1955 pp 320 ~ 325
- (13) T. Laurant ; "Le filter Zig-Zag — un nouveau filtre passe-band trouvé à l'aide des transformations fréquentielles"
Ericson Techn. Bd. 4 (1936) S. 3.
- (14) B. J. Bennet ; "A Note on Filter Synthesis" I. R. E. Transactions on Circuit Theory, CT-1 (3) p 61 ~ p 64 (September 1954)
- (15) 池野信一 ; 研究実用化報告 (電気通信研究所)
Vol. 4 No. 3 (1955) pp 379
- (16) 矢崎銀作 ; "相互形濾波器に関する二三の考察"
電気通信学会雑誌 Vol 37 (昭 29 年) pp 347 ~ 353
- (17) 宮田昌次郎・橘陽志 ; "非対称帯域フィルターの設計法"
電気三学会連合大会論文集 (昭 31 年 4 月) pp 38.

- (18) 羽鳥孝三 ; “フィルタ設計におけるチェビシェフ近似の方法”
北海道大学応用電気研究所素報 10 (1958年) 1, 2
- (19) S. Okada ; “Algebraic and topological foundations of network synthesis” Proc. of the Symposium on Modern Network Synthesis Polytechnic Inst of Brooklyn (April 1955) pp 283 ~ 322
- (20) S. Seshu ; W. Mayeda ; “Topological Formulas for Network Functions” Interim Tech. Rep. No.3 Univ of Illinois August 1956
- (21) W. Mayeda ; “Topological Formulas for Active Networks” Interim Tech Rep. No. 8 Univ of Illinois January 1958.
- (22) 近藤一夫, 小野寺力男 ; “回路のトポロジー”
岩波講座現代応用数学 岩波書店(東京) 1958年
- (23) W.S. Percival ; “Improved Matrix and Determinant Methods for Solving Networks”
Proc I.E.E Vol pt III pp 258 ~ pp265
- (24) W. Mayeda ; “The Application of Mathematical Logic to Network Theory” Interim Tech Rep No.9 Univ of Illinois April 1958
- (25) W. Mayeda ; “Digital Determination of Topological Quantities and Network Function”
Interim Tech Rep No.6 Jan 1957 Univ of Illinois
- (26) T. Fujisawa ; “One Problem of Network Topology”
I. R. E. Transactions on Circuit Theory CT-6 Sept-1959, No. 3 pp 261 ~ 266
- (27) Abraham Bers ; “The Degrees of Freedom in RLC Networks”

I. R. E. Transactions on Circuit Theory C.T-6. March 1959
No. 1 pp 91 ~ 95

- (28) E. A. Guillemin ; "Synthesis of Passive Networks"
John Wiley & Sons. Inc. New York N. Y. 1957
- (29) G. Kirchhoff ; "Über die Auflösung der Gleichungen.
auf welche man bei der Untersuchung der Linearen
Vertheilung Galvanischer Stöme geführt wird" Ann, Phys.
Chem. Vol 72 pp 497 ~ 508 Dec. 1847
- (30) W. Mayeda and E. Van Valkenburg ; "Network analysis
and synthesis by digital computers"
1957 I. R. E. WESCON Record , pt 2 pp 137 ~ 144 .
- (31) J. Macwilliams "Topological Network Analysis as a
Computer Program" I. R. E. Transactions on Circuit
Theory 1958 Sept. pp 228 ~ 229
- (32) Earl W. Hobbs ; "Topological Network Analysis as a
Computer Program" I. R. E. Transactions on Circuit Theory.
1959 March pp. 135 ~ 136
- (33) W. Mayeda ; "Reducing Computation Time in the
Analysis of Networks by Digital Computer" I. R. E.
Transactions on Circuit Theory 1959 March pp 136 ~
137
- (34) 岩沢健吉 ; "代數関数論" 岩波書店 東京 1952
- (35) M. B. Reed and S. Seshu "On Topology and Network
Theory" Proc. Univ of Illinois Symposium on Circuit
Analysis. 1955. pp 2.1 ~ 2.16
- (36) H. Whitney "Non-Separable and Planner Graph"
Transactions of American Mathematical Society Vol. 34
(1932) pp. 339 ~ 362

- (37) Frank Harary "Graph Theory and Electric Networks"
Transactions of the 1959- International Symposium on
Circuit and Information Theory (Held at Los Angeles
Calif. Jun-14-18 1959) pp 95 ~ 126
- (38) 渡部和 ; "フイルタ設計問題の一考察" 電気三学会連合大会講演論文集
昭305月 pp32
- (39) 渡部和 ; "帯域濾波梯子回路の構成について" 電気通信学会回路網理論研
究専門委員会資料 昭31年6月
- (40) 渡部和, 藤本和弘 ; "フイルタ帯域変換の考察" 電気通信学会全国大会講
演論文集 昭31年11月 p.9
- (41) 渡部和 ; "帯域濾波梯子回路の構成について" 電気通信学会全国大会講演
論文集 昭31年11月 p.10
- (42) 渡部和, 藤本和弘 ; "等化回路構成について" 電気三学会連合大会講演論
文集 昭32年4月 p.893
- (43) 家所得壽, 渡部和 ; "狭帯域濾波器の設計について" 電気三学会連合大会
講演論文集 昭32年4月 p.894
- (44) 渡部和 ; "濾波器設計の水平近似問題" 電気通信学会回路網理論研究専門
委員会資料 昭32年5月
- (45) 渡部和 ; "帯域濾波梯子回路の構成について" 電気通信学会雑誌 昭32
年10月 pp 1108 ~ 1114
- (46) 渡部和 ; "回路網の直接近似問題について" 電気通信学会全国大会
昭33年11月 p.16
- (47) Hitoshi Watanabe ; "Synthesis of Band-Pass Ladder
Networks" The I. R. E Transactions on Circuit Theory
Dec. 1958 Vol. CT-5 pp 256 ~ 264
- (48) 渡部和 ; "回路網の自動計算について" 電気通信学会回路網理論研究専

門委員資料 1959年1月

- (49) 衣所得壽, 渡部和 ; “最小線輪数回路について” 電気通信学会全国大会講演論文集 1959年10月 p. 6
- (50) 渡部和 ; “複通過域濾波器” 電気通信学会全国大会講演論文集 1959年10月 p. 10
- (51) 渡部和 ; “電子計算機による回路網計算について” 電子工業 昭34年10月 (小峰電子工業株式会社発行) pp 897 ~ 904
- (52) 桂重俊, 小野寺大, 野口正一, 楯苗代盛, 本多波雄, 大泉九郎, 渡部和, 石井善昭, 遠藤良明, 出川雄二郎
“SENAC-1 (NEAC-1102) の概要および命令構成” 電気通信学会雑誌 昭34年11月 Vol 42, pp 1000 ~ 1008
- (53) 遠藤良明, 石井善昭, 渡部和, 山本淳三, 富田真吾, 野口正一, 小野寺大, 松尾正之 “SENAC-1 (NEAC-1102) の演算装置について” 電気通信学会雑誌 昭34年11月 Vol 42 pp. 1008 ~ 1014
- (54) 野口正一, 小野寺大, 松尾正之, 遠藤良明, 石井善昭, 渡部和, 山本淳三, 富田真吾 ; “SENAC-1 (NEAC-1102) の制御装置について” 電気通信学会雑誌 昭34年11月 Vol 42 pp 1014 ~ 1020
- (55) 渡部和 ; “最小線輪数回路について” 電気通信学会回路網理論研究専門委員会資料 1960年1月
- (56) 渡部和 ; “複通過域濾波器的設計” 電気通信学会回路網理論研究専門委員会資料 1960年3月
- (57) 渡部和 ; “ろ波器的チエビシエフ近似理論” 電気通信学会雑誌 昭35年3月 pp. 271 ~ 280.
- (58) Hitoshi Watanabe ; “On the Circuit with a minimum number of Coils” The I. R. E. Transactions on Circuit Theory 1960 March Vol CT-7